
VITTORIO EM. III

POLYGONOMÉTRIE

OU

DE LA MESURE DES FIGURES RECTILIGNES.

ET

ABRÉGÉ

D'ISOPÉRIMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

OU

DE LA DÉPENDANCE MUTUELLE DES GRANDEURS ET DES LIMITES DES FIGURES.

PAR

SIMON LHUILIER,

Citoyen de Genève, Membre de la Société pour l'Encouragement des Arts;

De l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe, de la Société établie en Pologne ſur l'Éducation nationale, & Correſpondant de l'Académie Impériale de Saint-Pétersbourg.

Aux dépens de l'Auteur.

A GENEVE,

Chez Barde, Manget & Compagnie, Imprimeurs-Libraires.

A PARIS,

Chez Buisson, Libraire, rue Haute-Feuille.

M. DCC. LXXXIX.

TABLE.

Second Cas. Les Droites données de position ne partent pas d'un même Point. Développement général (§. *l*). Application détaillée au Triangle (§§. *m* & *n*). Conséquences (§. *o*).

Digressions sur les *Lieux plans* d'Apollonius; & sur les *Porismes*. Observations sur la Loi de Continuité, & sur les Produits apparens dont Zéro est un Facteur.

Avis sur l'Abrégé d'Isopérimétrie.

Chapitre premier. Des Figures planes. Le Triangle équilatéral a le Contour le plus petit avec la même Surface; & réciproquement (§§. 2 — 8). De toutes les Figures faites avec des Côtés donnés, la plus grande est inscriptible au Cercle (§§. 9-11). De toutes les Figures de même nom & de même Contour, la Figure régulière est la plus grande, & elle a le plus petit Contour avec la même Surface (§§. 12 & 13). Le Cercle est plus grand qu'aucune Figure rectiligne de même Contour; & les Figures régulières isopérimètres sont d'autant plus grandes que les Nombres de leurs Côtés sont plus grands; & réciproquement (§§. 14 — 20).

Chapitre second. Des Parallélépipèdes, des Prismes & des Cylindres. De tous les Prismes de même Base & de même Hauteur, le Prisme droit a la Surface la plus ~~petite~~, & réciproquement (§. 21). Des Prismes droits égaux de même hauteur & de même nom, celui qui a pour Base une Figure régulière a la Surface la plus petite, & réciproquement; les Surfaces des Prismes droits égaux à Bases régulières égales sont d'autant plus petites, que le nombre des Côtés de la Base est plus grand, & réciproquement; en particulier, le Cylindre droit est plus grand qu'aucun Prisme de même Base & même Hauteur (§§. 22 — 25). De tous les Prismes droits égaux, à Bases régulières semblables, celui dont la Hauteur est double du Rayon du Cercle inscrit à la Base a la Surface la plus petite, & réciproquement. Cas particuliers du Cube & du Cylindre d'Archimède (§§. 26 — 29).

Chapitre troisième. Des Pyramides & des Cônes. Une Pyramide droite a une Surface plus petite qu'une Pyramide oblique de même Base & Hauteur (§. 30). De deux Pyramides droites de même Hauteur & de Bases égales de même nom, celle dont la Base est régulière a la Surface la plus petite (§. 31). Les Bases régulières étant égales, la Pyramide dont la Base a le plus grand nombre de Côtés a la Surface la plus petite, & le Cône droit a une Surface plus petite qu'aucune Pyramide de même Base & de même Hauteur (§§. 32). Inverses (§. 33). De tous les Cônes droits égaux, celui dont le Côté est triple du Rayon de la Base a la Surface totale la plus petite, & l'inverse (§§. 34 — 35). Application aux Pyramides droites (§. 38).

Chapitre quatrième. De la Sphère. La Sphère est plus grande qu'aucun Solide de même Surface circonscriptible à une Sphère, & réciproquement (§§. 39—42).

ERRATA.

Pages	*Lignes*	*Au lieu de*	*Lisez*
1	28	elle	elles
6	3	cet	ce
44	27—28	le Point donné	les Points donnés
53	37	*NA*	*NA'*
73	16	partant	partent
79	8	*YCG*	*YC'*
99	7 & 21	*Z*	*Y*
101	21	Parallélpipèdes	Parallélépipèdes

INTRODUCTION.

INTRODUCTION.

Les Mathématiciens, tant anciens que modernes, se sont occupés avec tant de soin des Triangles, qui sont les plus simples des Figures rectilignes eu égard au nombre de leurs côtés, qu'ils paroissent avoir épuisé les propriétés nombreuses & remarquables de cette classe de Figures. Au contraire, ils se sont peu occupés des Figures rectilignes en général; & si on omet les Propositions rélatives à la réductibilité de toute Figure rectiligne en un Triangle, en un Rectangle, & enfin en un Quarré; aux valeurs des sommes de leurs Angles tant intérieurs qu'extérieurs, & enfin celles sur le rapport qui règne entre les Figures semblables; on n'a, je crois, sur ces Figures aucune propriété générale. Les Figures régulières, les symmétriques, & celles qui sont inscriptibles ou circonscriptibles au Cercle, qui ont occupé davantage les Mathématiciens, ne sont que des classes particulières qui n'appartiennent pas à une Polygonométrie générale.

La réduction d'une Figure rectiligne en un Triangle, en lui ôtant successivement un côté sans changer sa surface, exige un nombre d'opérations successives & dépendantes les unes des autres, d'autant plus grand, que cette Figure a un nombre plus grand de côtés; & le résultat final est d'autant plus incertain, que ce nombre d'opérations est plus grand. Aussi cette réductibilité qui devroit être d'une si grande utilité dans la Pratique, approche d'être un objet de pure théorie pour peu que le nombre des côtés soit grand. En particulier, si on applique le calcul à cette suite d'opérations pour trouver les dimensions du Triangle dans lequel la Figure a été réduite, & pour estimer sa surface d'après ces dimensions, on est obligé de calculer un grand nombre de Lignes & d'Angles étrangers au but principal, & de le faire avec une exactitude qu'on peut à peine attendre des calculs faits avec les Tables trigonométriques ordinaires. La division d'une Figure en Quadrilatères par des Diagonales peut être moins sujette aux inconvéniens qui découlent de la dépendance des calculs; mais elle exige aussi des opérations étrangères, tels que les calculs de ces Diagonales, & des Perpendiculaires qui sont abaissées sur elle depuis les sommets de la Figure.

Ces considérations me faisoient désirer depuis long-tems de pouvoir calculer immédiatement la surface d'une Figure rectiligne dans celles de ses parties qui la déterminent,

qu'on peut regarder comme principales & essentielles; savoir, ses Côtés & ses Angles, sans être obligé de calculer plusieurs Quantités souvent étrangères au but principal. J'ai eu la satisfaction de voir le succès répondre à mes désirs. La Formule que je trouve pour l'expression de la surface est symmétrique, très-simple & facile à retenir. Savoir : *Le double de la surface d'une Figure rectiligne est égal à la somme des Rectangles de ses Côtés deux à deux, excepté un, par les sinus des sommes des Angles extérieurs compris entr'eux.* L'égalité des expressions de cette surface, suivant qu'on omet tel ou tel de ses Côtés, fournit sur les Figures rectilignes en général des propriétés, non-seulement curieuses & intéressantes, mais encore fécondes en applications.

Dans le développement de cette matière, j'ai cru devoir suivre la marche de l'invention à-peu-près telle qu'elle s'est présentée à mon esprit. En lisant les Ouvrages sublimes d'un grand nombre d'Auteurs originaux, le Lecteur doit souvent regretter d'être réduit à être presque passif. En voilant la marche de leurs découvertes, ils excitent d'autant plus l'admiration; je dirai mieux, l'étonnement de leurs Lecteurs, qu'ils l'ont fait avec plus d'art; mais aussi ces derniers en retirent d'autant moins de fruit, ils forment d'autant moins leur esprit à l'invention, & se rendent d'autant moins propres à de nouvelles découvertes.

Ne nous le dissimulons point. Malgré les efforts de tant de Philosophes pour prescrire des Règles à l'esprit humain, c'est par l'exercice bien plus que par leurs préceptes que nos facultés se développent. Tout particuliérement; l'esprit d'invention, le génie créateur nait, se forme & se perfectionne, en se proposant des modèles à suivre, de grands Maîtres à imiter. Le tableau de la marche par laquelle un esprit inventif a été conduit à quelque découverte, est infiniment plus propre à servir de guide dans un pareil exercice, que ne peuvent l'être des Règles générales toujours vagues & abstraites si on ne développe pas le fil par lequel on y a été conduit. En vain un Auteur moderne répète-t-il à chaque page d'un Ouvrage destiné à servir de Logique pratique, que l'Analyse est le principe de toutes nos connoissances; pour que ses Leçons aient quelque utilité, elles doivent être appuyées sur des exemples d'Analyses bien faites & développées avec soin.

Je ne me flatte pas que la marche que j'ai suivie soit la plus simple, la plus abrégée de celles qu'on peut suivre en traitant la même matière; mais il suffit que ce soit réellement la marche qui m'a conduit à une découverte (quelque petite qu'elle soit), pour que j'aie cru ne devoir pas l'abandonner dans son développement. Heureusement

les Mathématiques font, ou du moins peuvent être, à l'abri de l'erreur. Mais dans les sciences qui ne font pas susceptibles de leur exactitude, je voudrois que les Auteurs qui nous transmettent des découvertes intéressantes, ne nous cachassent, ni leurs tentatives infructueuses, ni les erreurs par lesquelles ils ont passé, avant de parvenir à la vérité qu'ils croient avoir saisie. Mais je crains de pousser trop loin cette digression, & je reviens au plan de cet Ouvrage.

Le Chapitre second est un Traité de Polygonométrie proprement dite, correspondante à la Trigonométrie. Savoir, connoissant dans une Figure rectiligne des Côtés ou des Angles en nombre suffisant pour la déterminer, je me propose de calculer immédiatement les Côtés & les Angles restans déterminés, mais non-donnés.

Une Figure rectiligne pouvant toujours être décomposée en Triangles, les calculs à faire sur la première paroissent devoir se réduire toujours à des calculs à faire sur les derniers; & par conséquent, il peut paroître inutile de faire de la Polygonométrie une science détachée de la Trigonométrie. J'espère que la lecture de cet Opuscule montrera le foible de cette assertion, quel que soit le point de vue sous lequel on l'envisage, rélativement à la Pratique ou rélativement à la Théorie.

Quant à la Pratique, il y a une grande différence dans l'exactitude qu'on peut attendre des calculs faits sur les Quantités connues, pour en conclure immédiatement les Quantités inconnues; & celles qu'on peut attendre des calculs successifs & dépendans les uns des autres qu'entraîne la décomposition en Triangles. Ainsi connoissant dans une Figure rectiligne tous les Côtés excepté un, & tous les Angles excepté les deux adjacens à ce Côté, le procédé trigonométrique pour connoître le Côté & les Angles restans exige qu'on calcule successivement toutes les Diagonales qu'on peut mener du sommet d'un des Angles inconnus, & les Angles dont ces Diagonales sont une des jambes; tandis que par le procédé polygonométrique & immédiat, on n'a aucun besoin de calculer ces Quantités étrangères au but principal. De-là résulte pour la Pratique le double avantage de l'indépendance mutuelle des calculs à faire sur les Quantités connues, & de la diminution du nombre de ces calculs.

Quant à la Théorie, en suivant la route trigonométrique, on ne peut obtenir aucune propriété nouvelle des Figures rectilignes; tandis que le procédé immédiat appuyé sur autant de propositions neuves & remarquables des mêmes Figures, fournit l'occasion d'enrichir la science de Théorêmes intéressans. Et il arrive que les propriétés auxquelles

on eſt conduit, peuvent être énoncées d'une manière ſi ſimple & ſi ſymmétrique, qu'elles ſe gravent dans la mémoire avec la plus grande facilité.

L'Ouvrage que je publie doit n'être envifagé que comme une partie extrêmement petite d'une ſcience incomparablement plus étendue. Regardant une Figure comme déterminée par ſes Côtés & ſes Angles ſeulement; connus en nombre ſuffiſant pour la déterminer, je ne recherche non plus que ſes Côtés & Angles reſtans. Mais on peut ſe propoſer une recherche infiniment plus vaſte, & faire entrer parmi les Quantités données & déterminantes des Diagonales & des Angles formés ſoit par les Diagonales entr'elles, ſoit par les Côtés & les Diagonales. Mais ce problême général renferme un ſi grand nombre de cas particuliers, que je ne crois pas qu'on puiſſe le ſoumettre à quelques Règles générales, & qu'il y ait jamais un Mathématicien qui ait le courage de le pourſuivre. Je n'en citerai que deux exemples qui paroiſſent bien ſymmétriques, & dont à l'énoncé on n'apperçoit pas la difficulté. Ce ſont ceux d'un Hexagone déterminé par les connoiſſances de ſes neuf Diagonales, ou par celles de ſes ſix Côtés & des trois Diagonales qui joignent les ſommets diamétralement oppoſés.

Cependant, ſi quelque Mathématicien croyoit pouvoir entreprendre ce travail, il devroit ſans doute commencer par les Figures d'un petit nombre de Côtés, & en particulier par les Quadrilatères. Le célèbre *Lambert* eſt, je crois, le premier qui ait ſenti l'importance d'une Tétragonométrie complète. Dans ſon bel Ouvrage, intitulé : *Beytrage zum Gebrauche der Mathematik*, *zweyter Theil*, eſt un plan de Tétragonométrie dans lequel il fait l'énumération complète de tous les cas auxquels donnent lieu les Quantités déterminantes d'un Quadrilatère, Côtés, Angles & Diagonales. Mais il ſe contente de cette énumération, & il laiſſe à ceux qui voudront s'exercer dans la partie algébrique de la Trigonométrie le ſoin de l'exécuter.

Ce travail a été entrepris & complétement exécuté par M. *Biornſen*, Mathématicien Danois, qui a publié en 1780 un Ouvrage intitulé : *Introductio in Tetragonometriam ad mentem V. C. Lambert analyticè conſcripta; 8°. maj.* 440 *p.* La grandeur de cet Ouvrage montre aſſez combien une Pentagonométrie complète ſeroit volumineuſe; combien il eſt peu probable qu'on l'exécute jamais, & à plus forte raiſon combien on doit déſeſpérer de voir jamais une Polygonométrie univerſelle. M.T. *Mayer* doit auſſi avoir publié à Gottingue une Diſſertation inaugurale ſur le même ſujet; mais je n'ai pas pu me la procurer.

Déſeſpérant

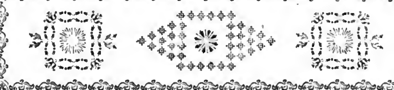
Déſeſpérant d'exécuter une Polygonométrie univerſelle, j'ai cru devoir eſſayer mes forces ſur une partie de cette ſcience ; en me bornant aux Quantités qui compoſent tout particuliérement le contour d'une Figure, ſavoir ſes Côtés & les Angles qu'ils font entr'eux. Enviſagée ſous ce point de vue limité, la Polygonométrie ſe réduit à un petit nombre de cas ; & elle eſt ſoumiſe à des Règles générales, indépendantes de celles de la Trigonométrie ; & qui renferment, ainſi que cela doit être, les Règles particulières de cette dernière.

J'avois compoſé le plan de cet Ouvrage, & trouvé les principes ſur leſquels repoſent les ſolutions de tous les cas, ſur la fin de mon ſéjour en Pologne ; & j'attendois pour y mettre la dernière main & pour le publier, de me trouver dans une poſition favorable pour en ſoigner moi-même l'impreſſion. Je croyois n'avoir eu dans cette recherche aucun prédéceſſeur. Mais pendant mon ſéjour à Tubingue, auprès de mon reſpectable ami, M. *Pfleiderer*, Profeſſeur de Mathématiques & de Phyſique dans l'Univerſité de cette ville, j'appris que M. *Lexell* avoit publié dans les Mémoires de Pétersbourg deux Diſſertations ſur le même ſujet ; & il m'en montra une traduction allemande que nous ſoupçonâmes avec raiſon inférieure à l'original.

De retour à Genève, mon premier ſoin fut de conſulter les Mémoires de Pétersbourg, Tomes XIX & XX. Je trouvai en effet que M. *Lexell* avoit exécuté le plan que je me propoſois ; & qu'en particulier il avoit trouvé les mêmes propoſitions fondamentales, telles qu'elles ſont contenues dans les §§. 15—18. Cependant, je vis bientôt que mon procédé différoit aſſez du ſien, ſoit par la forme des diviſions & ſubdiviſions, ſoit par la manière dont j'étois parvenu à ces propoſitions fondamentales, ſoit par les conſtructions que je développois, ſoit par les réflexions géométriques auxquelles j'étois amené, pour que le travail de M. *Lexell* ne dût pas m'engager à ſupprimer le mien. La détermination de la ſurface d'une Figure rectiligne dans ſes Côtés & ſes Angles, & les applications de la Formule élégante par laquelle elle eſt exprimée, eſt une matière que je crois entiérement neuve & qui m'eſt propre. Les Mémoires de Pétersbourg ne ſe trouvent pas même dans quelques Bibliothèques publiques, loin d'être à la portée du commun des particuliers. L'objet de cet Ouvrage eſt autant rélatif à la Pratique qu'à la Théorie : j'ai donc cru qu'il ſeroit utile de le voir développé dans une langue vivante. Enfin, pour le rendre d'une utilité plus générale, j'ai joint un Chapitre d'exemples numériques, calculés d'après les Formules contenues dans les Chapitres précédens.

L'Appendice que j'ai joint à cet Ouvrage eſt purement théorétique. La liaiſon qui règne entre l'objet de ce Mémoire & celui que je m'étois tout particuliérement propoſé de traiter, eſt ſi grande, que cet hors-d'œuvre ne ſauroit être regardé comme déplacé. La méthode que j'y ai ſuivie eſt ſi générale & ſi différente de celle de tous les Editeurs d'*Apollonius*; les Propoſitions que j'établis ſur les Figures en général & ſur le centre de gravité en particulier, me paroiſſent ſi remarquables; que je crois cette Diſſertation digne de fixer un inſtant l'attention des Mathématiciens, & propre à ſervir d'exercice utile aux jeunes Amateurs des ſciences mathématiques.





POLYGONOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

Expressions de la surface d'une Figure rectiligne dans ses côtés & ses angles.

§. I. LEMMES CONNUS de Trigonométrie analytique.

1°. $\text{Sin.}\,\overline{a+b} = \text{sin.}\,a\ \text{cos.}\,b + \text{cos.}\,a\ \text{sin.}\,b.$

2°. $\text{Sin.}\,\overline{a-b} = \text{sin.}\,a\ \text{cos.}\,b - \text{cos.}\,a\ \text{sin.}\,b.$

3°. $\text{Cos.}\,\overline{a-b} = \text{cos.}\,a\ \text{cos.}\,b + \text{sin.}\,a\ \text{sin.}\,b.$

4°. $\text{Cos.}\,\overline{a+b} = \text{cos.}\,a\ \text{cos.}\,b - \text{sin.}\,a\ \text{sin.}\,b.$

5°. $\text{Cos.}\,a + \text{cos.}\,b = 2\,\text{cos.}\,\frac{a-b}{2}\,\text{cos.}\,\frac{a+b}{2}$; ou $2\,\text{cos.}\,a\ \text{cos.}\,b = \text{cos.}\,\overline{a-b} + \text{cos.}\,\overline{a+b}.$

6°. $\text{Cos.}\,a - \text{cos.}\,b = 2\,\text{sin.}\,\frac{a-b}{2}\,\text{sin.}\,\frac{a+b}{2}$; ou $2\,\text{sin.}\,a\ \text{sin.}\,b = \text{cos.}\,\overline{a-b} - \text{cos.}\,\overline{a+b}.$

§. II. Autres Lemmes. 1°. $\text{Sin.}\,a\,\text{sin.}\,c + \text{sin.}\,b\,\text{sin.}\,\overline{a+b+c} = \text{sin.}\,\overline{a+b}\,\text{sin.}\,\overline{b+c}.$

2°. $\text{Sin.}\,a\,\text{sin.}\,c - \text{sin.}\,b\,\text{sin.}\,\overline{a-b+c} = \text{sin.}\,\overline{a-b}\,\text{sin.}\,\overline{c-b}.$

Démonstration. 1°. $2\,\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,c = \text{cos.}\,\overline{a-c} - \text{cos.}\,\overline{a+c}$ (§. 1er. 6tò.)

$2\,\text{sin.}\,b\,\text{sin.}\,\overline{a+b+c} = \text{cos.}\,\overline{a+c} - \text{cos.}\,\overline{a+2b+c}$ (idem.)

Donc, $2\,\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,c + 2\,\text{sin.}\,b\,\text{sin.}\,\overline{a+b+c} = \text{cos.}\,\overline{a-c} - \text{cos.}\,\overline{a+2b+c}.$

$= 2\,\text{sin.}\,\overline{a+b}\,\text{sin.}\,\overline{b+c}$ (idem.)

Donc, $\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,c + \text{sin.}\,b\,\text{sin.}\,\overline{a+b+c} = \text{sin.}\,\overline{a+b}\,\text{sin.}\,\overline{b+c}.$

Démonstration. 2°. $2\,\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,c = \text{cos.}\,\overline{a-c} - \text{cos.}\,\overline{a+c}$ (§. 1er. 6tò.)

$2\,\text{sin.}\,b\,\text{sin.}\,\overline{a-b+c} = \text{cos.}\,\overline{a-2b+c} - \text{cos.}\,\overline{a+c}$ (idem).

Donc, $2\,\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,c - 2\,\text{sin.}\,b\,\text{sin.}\,\overline{a-b+c} = \text{cos.}\,\overline{a-c} - \text{cos.}\,\overline{a-2b+c}.$

$= 2\,\text{sin.}\,\overline{a-b}\,\text{sin.}\,\overline{c-b}$ (idem.)

Donc, $\text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,c - \text{sin.}\,b\,\text{sin.}\,\overline{a-b+c} = \text{sin.}\,\overline{a-b}\,\text{sin.}\,\overline{c-b}.$

§. III. *Lemme connu.* Le double de la surface d'un Triangle, est au Rectangle de deux de ses Côtés, comme le Sinus de l'Angle compris entre ces Côtés est au Sinus total. Savoir, appelant S la surface d'un Triangle dont les Côtés & l'Angle compris sont respectivement A, B, c; on a l'Equation, $2S = AB \text{ sin. } c$.

§. IV. Ces Lemmes admis, je vais chercher l'Expression de la surface d'une Figure rectiligne dans ses Côtés & ses Angles seulement. Or, ces Figures se divisent en deux Classes, dont la première contient les Figures qui n'ont que des Angles saillans, & dont la seconde contient les Figures qui ont un ou quelques Angles rentrans. Partant, je serai appelé à m'occuper successivement de ces deux Classes. Et comme les Figures de la première Classe sont les plus aisées à traiter sans entrer dans des Distinctions qu'exigent celles de la seconde, & que ce sont celles qui se présentent le plus souvent; je m'occuperai d'abord seulement de cette première Classe, & je montrerai ensuite les légers changemens à faire aux Formules trouvées pour les Figures de cette Classe, afin qu'elles soient applicables à celles de la seconde.

§. V. *Premier Exemple.* Le double de la surface d'un *Quadrilatère* est égal à la somme des Rectangles de ses Côtés, excepté un, pris deux à deux; par les Sinus des Sommes de ses Angles extérieurs compris entre ces Côtés.

Fig. I. *Symboliquement.* Soit $ABCD$ un Quadrilatère, dont les Angles extérieurs soient désignés par A, B, C, D, & soit S la surface de ce Quadrilatère. J'affirme; que

$$2S = \begin{array}{l} AB \times BC \text{ sin. } B \\ \qquad\quad CD \text{ sin. } B+C \\ \quad BC \times CD \text{ sin. } C. \end{array}$$

Construction. Que les Côtés AB, DC, se rencontrent en b.

Démonstration. $ABCD = AbD - BbC$.

$$\text{Donc, } 2S = Ab \times bD \text{ sin. } b - Bb \times bC \text{ sin. } b \quad (\text{§. III.})$$
$$= (AB+Bb)(bC+CD) \text{ sin. } b - Bb \times bC \text{ sin. } b$$
$$= \begin{array}{l} AB \times bC \text{ sin. } b \\ AB \times CD \text{ sin. } b \\ Bb \times CD \text{ sin. } b \end{array}$$

Or, le Triangle BbC donne les deux Proportions $\begin{array}{l} bC : BC = \text{sin. } B : \text{sin. } b. \\ Bb : BC = \text{sin. } C : \text{sin. } b. \end{array}$; d'où découlent les deux Equations $\begin{array}{l} bC \text{ sin. } b = BC \text{ sin. } B. \\ Bb \text{ sin. } b = BC \text{ sin. } C. \end{array}$; & $\text{sin. } b = \text{sin. } B+C$.

$$\text{Donc, } 2S = \begin{array}{l} AB \times BC \text{ sin. } B \\ \qquad\quad CD \text{ sin. } B+C \\ \quad BC \times CD \text{ sin. } C. \end{array}$$

Remarque.

Remarque première. Le procédé feroit le même (*mutatis mutandis*) ſi les Côtés AB, DC, ſe rencontroient étant prolongés dans le ſens oppoſé à celui de la Figure. Si ces Côtés ſont parallèles ; c'eſt-à-dire, ſi la Somme des deux Angles B & C vaut deux Droits ; le Sinus de cette ſomme évanouit, & il reſte pour l'Expreſſion de $2S$; $\begin{array}{l} AB \times BC \ \text{ſin.}\ B \\ BC \times CD \ \text{ſin.}\ C \end{array} = (AB+CD)\ BC\ \text{ſin.}\ B$; ainſi que cela doit être.

Remarque ſeconde. Je ne m'arrêterai, ni dans cet Exemple, ni dans les ſuivans, à comparer cette Expreſſion avec quelques autres de la même ſurface, pour en tirer des conſéquences. Je me propoſe de le faire d'une manière générale ; après avoir établi la Propoſition générale ſur la ſurface d'une Figure rectiligne.

§. VI. *Second Exemple.* Le double de la ſurface d'un *Pentagone* eſt égal à la Somme des Rectangles de ſes Côtés, excepté un, pris deux à deux, par les Sinus des Sommes des Angles extérieurs compris entre ces Côtés.

Symboliquement. Soit $ABCDE$ un Pentagone, dont les Angles extérieurs ſoient déſignés par A, B, C, D, E, & ſoit S la ſurface de ce Pentagone. Fig. II.

J'affirme que,
$$2S = \begin{array}{l} AB \times BC \ \text{ſin.}\ B \\ \qquad\quad\ \ CD \ \text{ſin.}\ B+C \\ \qquad\quad\ \ DE \ \text{ſin.}\ B+C+D \\ BC \times CD \ \text{ſin.}\ C \\ \qquad\quad\ \ DE \ \text{ſin.}\ C+D \\ CD \times DE \ \text{ſin.}\ D. \end{array}$$

Conſtr. Que les Côtés AB, DC, ſe rencontrent en b.

Dem. $ABCDE = AbDE - BbC.$

Donc (§. V.)
$$\begin{aligned} 2S &= \begin{array}{l} Ab \times bD \ \text{ſin.}\ b \\ \qquad\quad DE \ \text{ſin.}\ b+D \\ bD \times DE \ \text{ſin.}\ D. \end{array} - Bb \times bC \ \text{ſin.}\ b \\ &= \begin{array}{lll} (AB+Bb) & (bC+CD) & \text{ſin.}\ b - Bb \times bC \ \text{ſin.}\ b \\ (AB+Bb) & DE & \text{ſin.}\ b+D \\ (bC+CD) & DE & \text{ſin.}\ D. \end{array} \\ &= \begin{array}{l} AB \times bC \ \text{ſin.}\ b \\ AB \times CD \ \text{ſin.}\ b \\ Bb \times CD \ \text{ſin.}\ b \\ AB \times DE \ \text{ſin.}\ b+D \\ Bb \times DE \ \text{ſin.}\ b+D \\ bC \times DE \ \text{ſin.}\ D \\ CD \times DE \ \text{ſin.}\ D \end{array} = \begin{array}{l} AB \times BC \ \text{ſin.}\ B \\ AB \times CD \ \text{ſin.}\ B+C \\ BC \times CD \ \text{ſin.}\ C \\ AB \times DE \ \text{ſin.}\ B+C+D \\ BC \times DE \ \text{ſin.}\ B+C+D \times \dfrac{\text{ſin.}\ C}{\text{ſin.}\ B+C} \\ BC \times DE \ \text{ſin.}\ D \times \dfrac{\text{ſin.}\ B}{\text{ſin.}\ B+C} \\ CD \times DE \ \text{ſin.}\ D. \end{array} \end{aligned}$$

Or (§. II. 1°.) $\sin. B \sin. D + \sin. C \sin. B+C+D = \sin. B+C \sin. C+D$.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Donc } 2S = & AB \times BC & \sin. B \\
 & \quad CD & \sin. B+C \\
 & \quad DE & \sin. B+C+D \\
 & BC \times CD & \sin. C \\
 & \quad DE & \sin. C+D \\
 & CD \times DE & \sin. D.
\end{array}
$$

§. VII. *Troiſième Exemple.* Le double de la ſurface d'un *Hexagone* eſt égal à la Somme des Rectangles de ſes Côtés, excepté un, pris deux à deux, par les Sinus des Sommes des Angles extérieurs compris entre ces Côtés.

Fig. III. *Symb.* Soit $ABCDEF$ un Hexagone dont les Angles extérieurs ſoient déſignés par A, B, C, D, E, F; & ſoit S ſa ſurface.

$$
\begin{array}{lll}
\text{J'affirme que, } 2S = & AB \times BC & \sin. B \\
 & \quad CD & \sin. B+C \\
 & \quad DE & \sin. B+C+D \\
 & \quad EF & \sin. B+C+D+E \\
 & BC \times CD & \sin. C \\
 & \quad DE & \sin. C+D \\
 & \quad EF & \sin. C+D+E \\
 & CD \times DE & \sin. D \\
 & \quad EF & \sin. D+E \\
 & DE \times EF & \sin. E.
\end{array}
$$

Conſtr. Que les Côtés AB, DC ſe rencontrent en b.

Dem. $S = AbDEF - BbC$.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Donc (§. VI.) } 2S = & Ab \times bD & \sin. b \qquad - Bb \times bC \sin. b \\
 & \quad DE & \sin. b+D \\
 & \quad EF & \sin. b+D+E \\
 & bD \times DE & \sin. D \\
 & \quad EF & \sin. D+E \\
 & DE \times EF & \sin. E
\end{array}
$$

Or, 1°. $Ab \times bD \sin. b - Bb \times bC \sin. b$

$= (AB+Bb)(bC+CD) \sin. b - Bb \times bC \sin. b$

$= AB \times BC \sin. B + AB \times CD \sin. B+C + BC \times CD \sin. C$

2°. $Ab \times DE \sin. b+D = (AB+Bb) DE \sin. B+C+D$

$= AB \times DE \sin. B+C+D + BC \times DE \sin. B+C+D \dfrac{\sin. C}{\sin. B+C}$

$3^{o}.\quad Ab\times EF\ \text{ſin.}\, b+D+E = (AB+Bb)\,EF\ \text{ſin.}\, B+C+D+E$

$= AB\times EF\ \text{ſin.}\, B+C+D+E + BC\times EF\ \text{ſin.}\, B+C+D+E \times \frac{\text{ſin.}\, C}{\text{ſin.}\, B+C}$

$4^{o}.\quad bD\times DE\ \text{ſin.}\, D = (bC+CD)\,DE\ \text{ſin.}\, D$

$= CD\times DE\ \text{ſin.}\, D + BC\times DE\ \text{ſin.}\, D\ \frac{\text{ſin.}\, B}{\text{ſin.}\, B+C}$

$5^{o}.\quad bD\times EF\ \text{ſin}\, D+E = (bC+CD)\,EF\ \text{ſin.}\, D+E$

$= CD\times EF\ \text{ſin.}\, D+E + BC\times EF\ \text{ſin.}\, D+E\ \frac{\text{ſin.}\, B}{\text{ſin}\, B+C}$

Or, la ſomme des coefficiens du Rectangle $BC\times DE$, eſt

$\frac{\text{ſin.}\, B\ \text{ſin.}\, D + \text{ſin.}\, C\ \text{ſin.}\, B+C+D}{\text{ſin.}\, B+C} =$ (§. II. 1°.) $\text{ſin.}\, C+D$

Et la ſomme des coefficiens du Rectangle $BC\times EF$, eſt

$\frac{\text{ſin.}\, B\ \text{ſin.}\, D+E + \text{ſin.}\, C\ \text{ſin.}\, B+C+D+E}{\text{ſin.}\, B+C} =$ (§. II. 1°.) $\text{ſin.}\, C+D+E$.

Donc, faiſant les ſubſtitutions de tous ces termes, & les diſpoſant dans l'ordre convenable, on trouve la même expreſſion que celle de l'énoncé.

§. VIII. Ces Exemples, en petit nombre, peuvent ſuffire pour faire comprendre la marche de la Démonſtration de la Propoſition générale ſuivante.

Le double de la ſurface d'une *Figure* rectiligne *quelconque* eſt égal à la ſomme des Rectangles de ſes Côtés, excepté un, pris deux à deux, par les Sinus des Sommes des Angles extérieurs compris entr'eux.

Symboliquement. Soit $ABCDE \cdots LMN$ une Figure rectiligne, dont les Angles extérieurs ſoient déſignés par $A, B, C, D, E \cdots L, M, N$, & dont la ſurface ſoit S. J'affirme que,

$$
\begin{array}{lll}
2S = & AB\times BC & \text{ſin.}\, B \\
 & \quad CD & \text{ſin.}\, B+C \\
 & \quad DE & \text{ſin.}\, B+C+D \\
 & \quad \vdots & \\
 & \quad LM & \text{ſin.}\, B+C+D + \cdots L \\
 & \quad MN & \text{ſin.}\, B+C+D + \cdots M \\
 & BC\times CD & \text{ſin.}\, C \\
 & \quad DE & \text{ſin.}\, C+D \\
 & \quad \vdots & \\
 & \quad LM & \text{ſin.}\, C+D + \cdots L \\
 & \quad MN & \text{ſin.}\, C+D + \cdots M \\
 & CD\times DE & \text{ſin.}\, D \\
 & \quad \vdots & \\
 & \quad LM & \text{ſin.}\, D + \cdots L \\
 & \quad MN & \text{ſin.}\, D + \cdots M \\
 & \quad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\
 & LM\times MN & \text{ſin.}\, M
\end{array}
$$

La vérité de cette Propoſition ſera démontrée, ſi je prouve que, quand elle eſt vraie pour une Figure d'un certain nombre de Côtés, elle eſt encore vraie pour une

Figure d'un nombre de Côtés plus grand d'une unité. Car, comme elle a été démontrée vraie pour les Figures d'un petit nombre de Côtés, tels que 3, 4, 5, 6, elle sera vraie successivement pour un nombre quelconque.

Que les Côtés AB, DC, se rencontrent en b.

$$ABCDE \cdots MN = AbDE \cdots MN - BbC$$

Donc (Supp.)

$$\begin{array}{rll} 2S = & Ab \times bD \,\text{fin.}\, b & - Bb \times bC \,\text{fin.}\, b \\ & \quad DE \,\text{fin.}\, b+D & \\ & \quad \vdots & \\ & \quad MN \,\text{fin.}\, b+D+\cdots M & \\ & bD \times DE \,\text{fin.}\, D & \\ & \quad \vdots & \\ & \quad MN \,\text{fin.}\, D+\cdots M & \\ & DE \times EF \,\text{fin.}\, E & \\ & \quad \vdots & \\ & \quad MN \,\text{fin.}\, E+\cdots M & \\ & \vdots & \\ & LM \times MN \,\text{fin.}\, M & \end{array}$$

Or,

$$\begin{aligned} & Ab \times bD \,\text{fin.}\, b - Bb \times bC \,\text{fin.}\, b \\ = & (AB+Bb)(bC+CD) \,\text{fin.}\, b - Bb \times bC \,\text{fin.}\, b \\ = & AB \times bC \,\text{fin.}\, b + AB \times CD \,\text{fin.}\, b + Bb \times CD \,\text{fin.}\, b \\ = & AB \times BC \,\text{fin.}\, B + AB \times CD \,\text{fin.}\, B+C + BC \times CD \,\text{fin.}\, C \\ & Ab \times DE \,\text{fin.}\, b+D = (AB+Bb)\, DE \,\text{fin.}\, b+D \\ = & AB \times DE \,\text{fin.}\, B+C+D + BC \times DE \,\text{fin.}\, B+C+D \times \frac{\text{fin.}\, C}{\text{fin.}\, B+C} \\ & \vdots \\ & Ab \times MN \,\text{fin.}\, b+D+\cdots M = (AB+Bb)\, MN \,\text{fin.}\, b+D+\cdots M \\ = & AB \times MN \,\text{fin.}\, B+C+D+\cdots M + BC \times MN \,\text{fin.}\, B+C+D \cdots M \times \frac{\text{fin.}\, C}{\text{fin.}\, B+C} \\ & bD \times DE \,\text{fin.}\, D = (bC+CD)\, DE \,\text{fin.}\, D \\ = & CD \times DE \,\text{fin.}\, D + BC \times DE \,\text{fin.}\, D \,\frac{\text{fin.}\, B}{\text{fin.}\, B+C} \\ & \vdots \\ & bD \times MN \,\text{fin.}\, D+\cdots M = (bC+CD)\, MN \,\text{fin.}\, D+\cdots M \\ = & CD \times MN \,\text{fin.}\, D+\cdots M + BC \times MN \,\text{fin.}\, D+\cdots M \times \frac{\text{fin.}\, B}{\text{fin.}\, B+C} \end{aligned}$$

Les Coefficiens des Rectangles font respectivement (§. II. 1°.)

$$\begin{array}{lcl} BC \times DE & \cdots & \text{fin.}\, C+D \\ \vdots & & \vdots \\ BC \times MN & \cdots & \text{fin.}\, C+D+E \cdots M \end{array}$$

Faisant les substitutions de ces coefficiens, & disposant les termes dans l'ordre convenable*, on obtient l'expression énoncée.

§. IX.

§. IX. *Remarque.* Le nombre des Côtés d'une Figure étant n, le nombre des termes qui composent l'expression de sa surface suivant le procédé précédent, est le même que le nombre des manières dont $n-1$ quantités peuvent être prises deux à deux; lequel nombre est $\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2}$. Mais ce nombre peut toujours être diminué & même réduit presque à la moitié de lui-même, en exprimant la surface dans tous les Côtés & dans tous les Angles excepté deux.

En effet, soit menée une Diagonale quelconque. On peut exprimer les Surfaces des deux Parties retranchées par cette Diagonale, dans les Côtés & les Angles de la Figure qui leur appartiennent; & la somme des nombres des termes qui composent leurs expressions est d'autant plus petite que les nombres des Côtés de ces deux Parties approchent davantage d'être égaux.

§. X. Les différentes expressions de la Surface d'une Figure, suivant le premier procédé (§. VIII.), devant revenir au même, quel que soit le Côté qu'on omet: on peut en tirer différentes Propositions sur ces Figures.

Premier Exemple. Soit $ABCD$ un Quadrilatère.

Soient égalées les deux expressions de la Surface, suivant qu'on omet les Côtés adjacens DA, AB; Fig. I.

On obtient: $$\begin{matrix} AB\times BC \text{ sin.} B \\ CD \text{ sin.} B+C \\ BC\times CD \text{ sin.} C \end{matrix} = \begin{matrix} AD\times DC \text{ sin.} D \\ CB \text{ sin.} D+C \\ DC\times CB \text{ sin.} C. \end{matrix}$$

Donc, $$AB\times\begin{matrix} BC \text{ sin.} B \\ CD \text{ sin.} B+C \end{matrix} = AD\times\begin{matrix} DC \text{ sin.} D \\ CB \text{ sin.} D+C. \end{matrix}$$

Et $$AB : AD = \begin{matrix} BC \text{ sin.} C+D \\ CD \text{ sin.} D \end{matrix} : \begin{matrix} BC \text{ sin.} B \\ CD \text{ sin.} B+C. \end{matrix}$$

Savoir, le rapport de deux Côtés adjacens est exprimé dans les Côtés restans, & les Angles non-compris entr'eux.

Item, soient égalées les deux Expressions de la Surface, répondantes aux omissions des Côtés opposés DA, BC.

$$\begin{matrix} AB\times BC \text{ sin.} B \\ CD \text{ sin.} B+C \\ BC\times CD \text{ sin.} C \end{matrix} = \begin{matrix} CD\times DA \text{ sin.} D \\ AB \text{ sin.} D+A \\ DA\times AB \text{ sin.} A \end{matrix} = -\begin{matrix} CD\times DA \text{ sin.} D \\ CD\times AB \text{ sin.} B+C \\ DA\times AB \text{ sin.} A. \end{matrix}$$

Donc, $$\begin{matrix} BC \text{ sin.} C \\ CD\times 2AB \text{ sin.} B+C \\ AD \text{ sin.} D \end{matrix} = AB\times\begin{matrix} AD \text{ sin.} A \\ -BC \text{ sin.} B. \end{matrix}$$

Second Exemple. Soient égalées les deux expressions de la Surface d'un Pentagone
Fig. II. *ABCDE*, suivant qu'on omet les deux Côtés adjacens *AE*, *AB*; & soient ôtés les termes communs à ces expressions. On obtient

$$\begin{array}{ll} AB\times BC \; fin.\, B & \\ CD \; fin.\, B+C & \\ DE \; fin.\, B+C+D & \end{array} = \begin{array}{l} AE\times ED \; fin.\, E \\ DC \; fin.\, E+D \\ CB \; fin.\, E+D+C \end{array}$$

D'où l'on déduit le Rapport de deux Côtés adjacens *AB*, *AE*, dans les autres Côtés & tous les Angles, excepté l'Angle compris entre les deux premiers.

En général. Soit la Figure *ABCDE - - - LMN*. Soient égalées les deux expressions de la Surface, en omettant les Côtés adjacens *AB*, *AN*; & soient ôtés les termes communs. On obtient

$$\begin{array}{l} AB\times BC \; fin.\, B \\ \quad CD \; fin.\, B+C \\ \quad DE \; fin.\, B+C+D \\ \quad \vdots \\ \quad LM \; fin.\, B+C+D+ - - L \\ \quad MN \; fin.\, B+C+D - - - L+M \end{array} = \begin{array}{l} AN\times NM \; fin.\, N \\ \quad ML \; fin.\, N+M \\ \quad \vdots \\ \quad ED \; fin.\, N+M+ - - E \\ \quad DC \; fin.\, N+M+ - - E+D \\ \quad CB \; fin.\, N+M - - - E+D+C \end{array}$$

De-là, on obtient le Rapport des deux Côtés adjacens *AB*, *AN*, dans les Côtés restans, & dans les Angles excepté celui qui est compris entre ces deux Côtés.

§. XI. Les différentes expressions de la Surface d'une Figure rectiligne suivant la manière dont on la décompose en deux Parties par une Diagonale, devant aussi revenir au même que celle qu'on obtient par l'omission d'un Côté. On peut encore tirer quelques Propositions sur les Figures rectilignes de l'égalité de ces expressions.

Fig. I. *Premier Exemple.* Soit le Quadrilatère *ABCD*; dans lequel soit menée la Diagonale *AC*. Soient égalées les deux expressions de la Surface, suivant qu'on regarde le Quadrilatère comme décomposé en deux Triangles *ABC*, *ADC*; ou suivant qu'on omet le côté *AD*; & soit ôté le Facteur commun *CD*; on obtient

$$AD \; fin.\, D = \begin{array}{l} BC \; fin.\, C \\ AB \; fin.\, B+C. \end{array}$$

Fig. II. *Second Exemple.* Soit le Pentagone *ABCDE*; dans lequel soit menée la Diagonale *AD*: soient égalées les deux expressions de la Surface, dont l'une provient de l'omission du Côté *AE*; & dont l'autre provient de la décomposition du Pentagone dans le Quadrilatère *ABCD* & dans le Triangle *AED*. Soient retranchés les termes communs à ces deux expressions; & soient divisés les termes restans par le Facteur commun *DE*; on obtient l'Equation

$$\begin{array}{l} AB \; fin.\, B+C+D \\ BC \; fin. \quad C+D \\ CD \; fin. \qquad D \end{array} = AE \; fin.\, E$$

On obtiendroit une autre rélation (moins ſimple) des Côtés; en comparant l'expreſſion rélative à l'omiſſion du Côté AE, avec l'expreſſion rélative à la décompoſition par la Diagonale AC.

En général. Dans la Figure $ABCDE----LMN$: ſoit menée la Diagonale AM; & ſoient comparées les deux expreſſions de la ſurface, dont l'une eſt rélative à l'omiſſion du Côté AN, & l'autre à la décompoſition de la Figure dans le Triangle AMN & dans la Figure $ABCDE---M$. Soient ôtés les termes communs à ces deux expreſſions; & ſoient diviſés les termes reſtans par le Facteur commun MN: on obtient l'Equation

$$\begin{array}{ll} AB\ \text{ſin.}\ B+C+D+E----M & = AN\ \text{ſin.}\ N \\ BC\ \text{ſin.}\ \quad C+D+E----M & \\ CD\ \text{ſin.}\ \qquad D+E----M & \\ DE\ \text{ſin.}\ \qquad\quad E----M & \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \\ MN\ \text{ſin.}\ -----------M & \end{array}$$

On obtient d'autres rélations moins ſimples de la décompoſition de la Figure par d'autres Diagonales.

§. XII. Les différentes expreſſions de la Surface d'une Figure rectiligne, provenantes de ſes décompoſitions en deux parties par différentes Diagonales devant auſſi revenir au même. On peut encore tirer de l'égalité de ces expreſſions différentes propriétés de ces Figures.

Exemple premier. Soit le Pentagone $ABCDE$ décompoſé en deux parties; une fois par la Diagonale AC, & une autre fois par la Diagonale AD. Soient égalées les deux expreſſions de ſa Surface ſuivant ces deux manières de le décompoſer; ſoient ôtés les termes communs à ces deux expreſſions, & ſoient diviſés les termes reſtans par le Facteur commun CD: on obtient l'Equation

$$\begin{array}{l} AB\ \text{ſin.}\ B+C \\ BC\ \text{ſin.}\ \quad C \end{array} = \begin{array}{l} DE\ \text{ſin.}\ D \\ EA\ \text{ſin.}\ D+E. \end{array}$$

Exemple ſecond. Soit $ABCDEF$ un Hexagone décompoſé en deux parties, une fois par la Diagonale AC, & une autre fois par la Diagonale AD. Et ſoient faites les mêmes opérations que dans l'Exemple précédent ſur les expreſſions de la Surface provenantes de ces deux décompoſitions. On obtient l'Equation Fig. III.

$$\begin{array}{l} AB\ \text{ſin.}\ B+C \\ BC\ \text{ſin.}\ \quad C \end{array} = \begin{array}{l} AF\ \text{ſin.}\ D+E+F \\ FE\ \text{ſin.}\ D+E \\ ED\ \text{ſin.}\ D \end{array}$$

On obtiendroit une propriété moins ſimple de la comparaiſon des expreſſions provenantes des décompoſitions par les Diagonales AC, AE.

En général. Soit $ABCD---MNA'B'C'D'----M'N'$ une Figure décompoſée

en deux parties par deux Diagonales voisines AN, NN'; menées d'un même sommet N. Soient égalées les deux expressions de la Surface provenantes de ces décompositions, & soient divisés les termes restans par leur Facteur commun AN'. On obtient l'Equation

$$\begin{array}{llcll} AB & \sin. A & = & NA' & \sin. A'+B'+C'+\cdots N' \\ BC & \sin. A+B & & A'B' & \sin. \quad B'+C'+\cdots N' \\ CD & \sin. A+B+C & & B'C' & \sin. \quad\quad C'+\cdots N' \\ \vdots & & & \vdots & \\ MN & \sin. A+B+C+\cdots M & & M'N' & \sin. \cdots\cdots\cdots\cdots N' \end{array}$$

Remarque. La simplicité des propriétés que nous venons de trouver dans les trois derniers Paragraphes doit faire présumer qu'elles sont susceptibles d'une démonstration intuitive & géométrique. Je ne tarderai pas de changer ce soupçon en certitude.

§. XIII. D'un même sommet soient menées deux Diagonales voisines; soient recherchées les Surfaces des parties de la Figure retranchées d'un même côté par ces Diagonales, & soit prise la différence de ces deux Surfaces. On obtient l'expression de la Surface du Triangle ayant son sommet au même point, & dont la Base est le Côté compris entre ces Diagonales. De cette manière, on obtient successivement les Surfaces de tous les Triangles qui ont pour bases les Côtés de la Figure, & pour sommet commun un des sommets de la Figure.

Exemple. Soit l'Hexagone $ABCDEF$. On a les Equations suivantes

$$\begin{array}{lcll} 2ABC & = & AB \times BC & \sin. B \\ 2ACD & = & CD \times AB & \sin. B+C \\ & & \quad\quad BC & \sin. \quad C \\ 2ADE & = & DE \times AB & \sin. B+C+D \\ & & \quad\quad BC & \sin. \quad C+D \\ & & \quad\quad CD & \sin. \quad\quad D \\ 2AEF & = & EF \times AB & \sin. B+C+D+E \\ & & \quad\quad BC & \sin. \quad C+D+E \\ & & \quad\quad CD & \sin. \quad\quad D+E \\ & & \quad\quad DE & \sin. \quad\quad\quad E \end{array}$$

Ou bien,

$$\begin{array}{lcll} 2AFE & = & AF \times FE & \sin. F \\ 2AED & = & ED \times AF & \sin. F+E \\ & & \quad\quad FE & \sin. \quad E \\ 2ADC & = & DC \times AF & \sin. F+E+D \\ & & \quad\quad FE & \sin. \quad E+D \\ & & \quad\quad ED & \sin. \quad\quad D \\ 2ACB & = & CB \times AF & \sin. F+E+D+C \\ & & \quad\quad FE & \sin. \quad E+D+C \\ & & \quad\quad ED & \sin. \quad\quad D+C \\ & & \quad\quad DC & \sin. \quad\quad\quad C \end{array}$$

Egalant les expreſſions des mêmes Triangles, on obtient des propriétés qui ſont les mêmes que celles des deux Paragraphes précédens.

En général. Soit $ABCDE ---- MN$ une Figure rectiligne ; on obtient les expreſſions ſuivantes des Triangles ayant leur ſommet commun au point A, & ayant pour baſes les côtés de la Figure oppoſés à ce ſommet.

$$\begin{array}{lcl}
2ABC & = & AB \times BC \;\text{ſin.}\, B \\
2ACD & = & CD \times \begin{array}{l} AB \;\text{ſin.}\, B+C \\ BC \;\text{ſin.}\, \phantom{B+{}}C \end{array} \\
2ADE & = & DE \times \begin{array}{l} AB \;\text{ſin.}\, B+C+D \\ BC \;\text{ſin.}\, \phantom{B+{}}C+D \\ CD \;\text{ſin.}\, \phantom{B+C+{}}D \end{array} \\
\vdots & & \\
2AMN & = & MN \times \begin{array}{l} AB \;\text{ſin.}\, B+C+D+ --- M \\ BC \;\text{ſin.}\, \phantom{B+{}}C+D+ --- M \\ CD \;\text{ſin.}\, \phantom{B+C+{}}D+ --- M \\ \vdots \\ LM \;\text{ſin.}\, ----------- M \end{array}
\end{array}$$

On obtiendroit d'autres expreſſions des mêmes Triangles, en partant des Angles N, M, ---- ; leſquelles égalées aux premières donnent autant de propriétés des Figures rectilignes rélativement à leurs Côtés & à leurs Angles conformes à celles des §§. XI & XII.

§. XIV. Les doubles des ſurfaces des Triangles ayant leur ſommet commun au point A & ayant pour baſes les côtés de la Figure, ſont reſpectivement égaux aux Rectangles de ces Côtés par les Perpendiculaires abaiſſées ſur eux depuis ce Sommet. Partant, comme les expreſſions de ces Surfaces ont ces Côtés eux-mêmes pour un de leurs Facteurs ; les autres Facteurs ſont égaux aux Perpendiculaires abaiſſées du Sommet A ſur ces Côtés.

Soient donc Ab, Ac, Ad, ---- Am, les Perpendiculaires abaiſſées du Sommet A, ſur les Côtés --- BC, CD, DE, ---- MN. On aura les Equations ſuivantes

$$\begin{array}{lcl}
Ab & = & AB \;\text{ſin.}\, B \\
Ac & = & \begin{array}{l} AB \;\text{ſin.}\, B+C \\ BC \;\text{ſin.}\, \phantom{B+{}}C \end{array} \\
Ad & = & \begin{array}{l} AB \;\text{ſin.}\, B+C+D \\ BC \;\text{ſin.}\, \phantom{B+{}}C+D \\ CD \;\text{ſin.}\, \phantom{B+C+{}}D \end{array} \\
\vdots & & \\
Am & = & \begin{array}{l} AB \;\text{ſin.}\, B+C+D ---- M \\ BC \;\text{ſin.}\, \phantom{B+{}}C+D ---- M \\ CD \;\text{ſin.}\, \phantom{B+C+{}}D ---- M \\ \vdots \\ LM \;\text{ſin.}\, ---------- M \end{array}
\end{array}$$

§. XV. La Perpendiculaire abaiſſée ſur un Côté depuis un Sommet, peut être exprimée dans les Côtés & les Angles ſitués de l'une ou de l'autre part entre ce Côté & ce Sommet. Partant, on a toujours deux Expreſſions égales de cette Perpendiculaire; & on obtient les mêmes Equations que celles des §§. XI—XIII.

En particulier, on obtient l'Equation ſuivante, tirée de la double Expreſſion de la Perpendiculaire abaiſſée ſur le Côté *MN*.

$$\begin{array}{l} AB\ \text{ſin.}\ B+C+D+\cdots M \\ BC\ \text{ſin.}\ \quad C+D+\cdots M \\ CD\ \text{ſin.}\ \qquad D+\cdots M \\ \vdots \\ LM\ \text{ſin.}\ \cdots\cdots\cdots M \end{array} = AN\ \text{ſin.}\ N$$

Mais, $N = 360^\circ - (A+B+C+D \cdots M)$.

Donc, $\text{ſin.}\ N = -\ \text{ſin.}\ A+B+C+D \cdots M$

De-là, $$\begin{array}{l} NA\ \text{ſin.}\ A+B+C+D \cdots M \\ AB\ \text{ſin.}\ \quad B+C+D \cdots M \\ BC\ \text{ſin.}\ \qquad C+D \cdots M \\ CD\ \text{ſin.}\ \qquad\quad D \cdots M \\ \vdots \\ LM\ \text{ſin.}\ \cdots\cdots\cdots M \end{array} = 0.$$

Ou, $$\begin{array}{l} NA\ \text{ſin.}\ N \\ AB\ \text{ſin.}\ N+A \\ BC\ \text{ſin.}\ N+A+B \\ CD\ \text{ſin.}\ N+A+B+C \\ \vdots \\ LM\ \text{ſin.}\ N+A+B+C \cdots L \end{array} = 0;$$

Ou bien, $$\begin{array}{l} AB\ \text{ſin.}\ A \\ BC\ \text{ſin.}\ A+B \\ CD\ \text{ſin.}\ A+B+C \\ \vdots \\ LM\ \text{ſin.}\ A+B+C+\cdots L \\ MN\ \text{ſin.}\ A+B+C+\cdots M \end{array} = 0.$$

Savoir, la ſomme des produits de chaque côté par le Sinus de la ſomme des Angles extérieurs compris entre ces Côtés & un Côté déterminé, en procédant toujours dans un même ſens, eſt zéro.

§. XVI. La marche que j'ai ſuivie pour exprimer les Perpendiculaires abaiſſées d'un ſommet d'une Figure ſur ſes côtés, a l'inconvénient de partir de la ſurface de cette Figure déja déterminée, pour en tirer les valeurs de ces Perpendiculaires (§. XIV.) Partant, elle procède du compoſé au ſimple; ce qui eſt contraire aux règles d'une

bonne méthode. D'un autre côté, la marche que j'ai ſuivie dans les §§. V—VIII, a le grand avantage de déterminer immédiatement la Surface dans les Côtés & les Angles de la Figure; ſans introduire (ou paroître introduire), même comme de ſimples moyens, des Quantités étrangères au but principal, comme le ſont ces Perpendiculaires. Pour corriger ce premier inconvénient, j'ai cherché à déterminer immédiatement les Perpendiculaires abaiſſées d'un Sommet quelconque d'une Figure rectiligne ſur un de ſes Côtés. C'eſt ce que j'ai obtenu avec facilité de la manière ſuivante.

Définition. Regardant un Côté quelconque d'une Figure rectiligne comme ſa *Baſe:* le *Sommet* de cette Figure eſt celui des Sommets de ſes Angles, duquel abaiſſant une Perpendiculaire ſur la Baſe, cette Perpendiculaire eſt la plus grande, & elle eſt appelée la *hauteur* de la Figure. Si le Côté le plus éloigné de la Baſe eſt parallèle à la Baſe, la hauteur de la Figure eſt la diſtance de ce Côté à la Baſe.

§. XVII. *Lemme premier.* Soient A, B, C, D, ---- L, M, les Sommets ſucceſſifs d'une Figure dont M eſt le ſommet. Fig. IV.

Par les Sommets . . . . B, C, D, ---- L, ſoient menées à la Baſe des Parallèles . . . . BB', CC', DD', ---- LL'.

J'affirme que les Angles CBB' ſont reſpectivement les ſupplémens des Angles $A+B$
DCC' — $A+B+C$
EDD' — $A+B+C+D$
⋮ — ⋮
MLL' — $A+B+C+D+ \cdots L$.

Que les Côtés CB, DC, ED, ---- ML, prolongés rencontrent la Baſe dans les Points . . . . . β, γ, δ, ---- λ

Les Angles extérieurs formés aux points β ſont reſpectivement égaux aux Angles. $A+B$
γ — $A+B+C$
δ — $A+B+C+D$
⋮ — ⋮
λ — $A+B+C+D+ \cdots L$.

Mais à cauſe du Parallèliſme, les Angles CBB', DCC'. EDD', --- MLL', ſont reſpectivement égaux aux Supplémens des Angles extérieurs en . . . . β, γ, δ, λ.

Donc, les expreſſions des Angles . . . CBB', DCC', EDD', --- MLL', ſont bien telles qu'elles ſont énoncées.

Lemme ſecond. Des Sommets B, C, D, --- L, M, ſoient abaiſſées ſur la Baſe les Perpendiculaires . . Bb, Cc, Dd, --- Ll, Mm. Et que les Perpendiculaires . . . . Cc, Dd, --- Ll, Mm, rencontrent les Parallèles à la Baſe menées par les Points B, C, --- K, L; dans les Points . . . . c', d', --- l', m'.

On a les Equations suivantes : $Bb = AB$ *sin.* A

$$Cc' = BC \text{ sin. } A+B$$
$$Dd' = CD \text{ sin. } A+B+C$$
$$\vdots$$
$$Ll' = KL \text{ sin. } A+B+C+ \cdots K$$
$$Mm' = LM \text{ sin. } A+B+C+ \cdots L.$$

En effet ; les Perpendiculaires . Bb, Cc', Dd', ---- Ll', Mm' ; sont respectivement les Sinus des Angles . . A , CBB', DCC', ---- LKK', MLL'; en prenant pour Rayons les Côtés de la Figure BA, CB, DC, ---- LK, ML.
Donc (*Lemme premier*), les Expressions de ces Perpendiculaires sont bien conformes à l'énoncé.

Application. On obtient donc, $Bb = AB$ *sin.* A

$$Cc = AB \text{ sin. } A$$
$$\quad BC \text{ sin. } A+B$$
$$Dd = AB \text{ sin. } A$$
$$\quad BC \text{ sin. } A+B$$
$$\quad CD \text{ sin. } A+B+C$$
$$\vdots$$
$$Ll = AB \text{ sin. } A$$
$$\quad BC \text{ sin. } A+B$$
$$\quad CD \text{ sin. } A+B+C$$
$$\vdots$$
$$\quad KL \text{ sin. } A+B+C \cdots K$$
$$Mm = AB \text{ sin. } A$$
$$\quad BC \text{ sin. } A+B$$
$$\quad CD \text{ sin. } A+B+C$$
$$\vdots$$
$$\quad LM \text{ sin. } A+B+C \cdots L.$$

Savoir, la Perpendiculaire abaissée sur un Côté depuis un Sommet, est égale à la Somme des Produits des Côtés compris entre ce Côté & le Sommet par les Sinus des Sommes des Angles extérieurs compris entre ces Côtés & celui sur lequel on abaisse les Perpendiculaires.

Remarque première. La Somme des Angles extérieurs compris entre deux Côtés, est égale à l'Angle que ces Côtés forment entr'eux extérieurement à la Figure. Partant, on peut énoncer un peu autrement cette Proposition. Savoir, la Perpendiculaire abaissée sur un Côté depuis un Sommet, est égale à la Somme des Produits des Côtés compris entre ce Côté & ce Sommet, par les Sinus de leurs Inclinaisons au même Côté.

Remarque

Remarque ſeconde. La diſtinction que j'ai faite de Baſe & de Sommet de la Figure n'eſt que pour la commodité ; & pour éviter les ſouſtractions correſpondantes aux Sinus des Angles plus grands que 180°. Mais cette diſtinction peut être omiſe ; & chaque Perpendiculaire abaiſſée d'un Sommet ſur un Côté, peut être exprimée par les Côtés & les Angles compris de part & d'autre entre ce Côté & ce Sommet. D'où l'on tire les Equations des §§. XI—XV.

§. XVIII. Après avoir obtenu des Propriétés des Figures rectilignes rélatives à leurs Côtés & aux Sinus de leurs Angles ; il eſt naturel de rechercher ſi on ne pourroit pas obtenir quelques Propriétés rélatives aux Coſinus des mêmes Angles. La même Figure & la même Conſtruction s'appliquent très-heureuſement à cette nouvelle recherche.

En effet,

$$\begin{array}{llll} Ab & = AB \; cos. NAB & = AB \; cos. \; 180° - A \\ Bc' & = & = BC \; cos. \; 180° - (A+B) \\ Cd' & = & = CD \; cos. \; 180° - (A+B+C) \\ \vdots & & \\ Lm' & \text{- - - - - - - - - - -} & = LM \; cos. \; 180° - (A+B+C \cdots L) \end{array}$$

De-là,

$$\begin{array}{ll} Ab = & AB \; cos. \; 180° - A \\ Ac = & AB \; cos. \; 180° - A \\ & BC \; cos. \; 180° - (A+B \\ Ad = & AB \; cos. \; 180° - A \\ & BC \; cos. \; 180° - (A+B \\ & CD \; cos. \; 180° - (A+B+C \\ \vdots & \\ Am = & AB \; cos. \; 180° - A \\ & BC \; cos. \; 180° - (A+B \\ & CD \; cos. \; 180° - (A+B+C \\ & \vdots \\ & LM \; cos. \; 180° - (A+B+C \cdots L. \end{array}$$

Savoir, ſi d'un Sommet on abaiſſe une Perpendiculaire ſur un Côté : La diſtance d'une des-extrêmités de ce Côté au pié de la Perpendiculaire, eſt égale à la Somme des Produits des Côtés compris entre ce Sommet & cette Extrêmité, par les Coſinus des Supplémens des Sommes des Angles extérieurs compris entre ces Côtés & celui ſur lequel on abaiſſe la Perpendiculaire ; ou par les Coſinus de leurs inclinaiſons à ce Côté comptées intérieurement rélativement à la Figure.

Cette propriété a lieu, non-ſeulement pour les Côtés compris d'une même part entre le Sommet de la Figure & le Côté ſur lequel on abaiſſe la Perpendiculaire, mais encore pour les Côtés ſitués au-delà du Sommet.

En effet, désignant par $N, O, P, Q, \ldots\ldots X, Y$, les Sommets restans de la Figure, à compter depuis le Sommet M; & des Sommets $N,\ O,\ P,\ Q,\ \ldots\ X$, abaissant les Perpendiculaires à la Base . . . . $Nn, Oo, Pp, Qq, \ldots\ Xx$, on aura de même

$$\begin{array}{lll}
mn = MN\ cos.\,180^{\circ}-(N+O+P+Q\,..\,X+Y & = MN\ cos.\,A+B+C+D\,..\,L+M & \ldots\ldots -180^{\circ} \\
no = NO\ cos.\,180^{\circ}-(\quad O+P+Q\,..\,X+Y & = NO\ cos.\,A+B+C+D\,..\,L+M+N & \ldots\ldots -180^{\circ} \\
op = OP\ cos.\,180^{\circ}-(\quad P+Q\,..\,X+Y & = OP\ cos.\,A+B+C+D\,..\,L+M+N+O & \ldots -180^{\circ} \\
pq = PQ\ cos.\,180^{\circ}-(\quad Q\,..\,X+Y & = PQ\ cos.\,A+B+C+D\,..\,L+M+N+O+P & ..\ -180^{\circ} \\
\vdots & & \\
xY = XY\ cos.\,180^{\circ}-\quad Y & = XY\ cos.\,A+B+C+D\,..\,L+M+N+O+P\ldots X & -180^{\circ}
\end{array}$$

Et comme $cos.\ 180^{\circ}-a = cos.\ a-180^{\circ}$. On voit que la Loi qui a lieu d'un côté du Sommet de la Figure, s'étend aussi au-delà de ce Sommet.

§. XIX. En particulier, toute la Figure étant $ABCDE \ldots MN$, on a l'Equation

$$\begin{array}{ll}
AN = & AB\ cos.\ 180^{\circ}-A \\
 & BC\ \ cos.\ 180^{\circ}-(A+B \\
 & CD\ \ cos.\ 180^{\circ}-(A+B+C \\
 & DE\ \ cos.\ 180^{\circ}-(A+B+C+D \\
 & \vdots \\
 & MN\ cos.\ 180^{\circ}-(A+B+C+D\ldots M
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Ou } & NA \\
 & AB\ cos.\ A \\
 & BC\ cos.\ A+B \\
 & CD\ \ cos.\ A+B+C \\
 & DE\ \ cos.\ A+B+C+D \\
 & \vdots \\
 & MN\ cos.\ A+B+C+D\ \ldots\ M = 0.
\end{array}$$

Remarque. Quoique j'aie supposé que les Perpendiculaires abaissées des Sommets d'une Figure sur un de ses Côtés, tombent sur ce Côté même: les Formules précédentes n'en sont pas moins générales, & applicables aux cas où les Piés de quelques-unes de ces Perpendiculaires sont sur les prolongemens de ce Côté. C'est qu'alors les Cosinus des Arcs qui affectent les Côtés sont négatifs, comme répondans à des Angles obtus. Ainsi lorsque A est aigu, $180^{\circ}-A$ est obtus, & le premier terme $AB\ cos.\ 180^{\circ}-A$ est le même que $AB\ cos.\ A$ précédé du signe de la soustraction.

Fig. V. §. XX. Pour illustration des Propositions contenues dans les §§. 17, 19 & 8, je vais les appliquer aux Figures régulières.

Soient $A, B, C, D \ldots M, N$, des Sommets successifs d'une Figure régulière; soient menées les Diagonales successives, $AC, AD, AE \ldots AM, AN$. Que l'Angle extérieur de la Figure soit désigné par $2A$, & que le Diamètre du Cercle circonscrit soit désigné par D. Les droites $AB,\quad AC,\quad AD,\quad AE,\ \ldots\quad AM,\quad AN$, seront respectivement $D\,sin.A,\ D\,sin.2A,\ D\,sin.3A,\ D\,sin.4A, \ldots D\,sin.n-1A,\ D\,sin.nA$.

Les Perpendiculaires abaiffées du Sommet A, fur les Côtés BC, CD, DE, ... MN, font refpectivement $AB\ fin.\,2A$, $AC\ fin.\,3A$, $AD\ fin.\,4A$, ... $AM\ fin.\,nA$;

ou $D(\ fin.A\ fin.2A,\ fin.2A\ fin.3A,\ fin.3A\ fin.4A,\ \ldots\ fin.\overline{n-1}A\ fin.nA.$

Mais (§. XVIII.), ces Perpendiculaires font

$$AB\ (fin.\,2A$$
$$fin.\,2A + fin.\,4A$$
$$fin.\,2A + fin.\,4A + fin.\,6A$$
$$\vdots$$
$$fin.\,2A + fin.\,4A + fin.\,6A \ldots\ fin.\,\overline{2n-2}A.$$

Donc, fubftituant à AB fa valeur $D\,fin.\,A$, on doit avoir en général l'Equation fuivante:

$$fin.\,A\ (fin.2A + fin.4A + fin.6A \ldots fin.\overline{2n-2}A = fin.\overline{n-1}A\ fin.nA$$

ou, $fin.2A + fin.4A + fin.6A \ldots fin.\overline{2n-2}A = fin.\overline{n-1}A\ fin.nA\ cofec.A.$

Ce qui eft connu. Voyez, par exemple, *Euleri Introductio*, Cap. XIV, §. 259.

2°. Les diftances des Piés des mêmes Perpendiculaires aux Sommets B, C, D, ... M, font refpectivement $AB\ cof.\,2A$, $AC\ cof.\,3A$, $AD\ cof.\,4A$ ... $AM\ cof.\,nA$;

ou $D(fin.A\ cof.2A,\ fin.2A\ cof.3A,\ fin.3A\ cof.4A,\ \ldots\ fin.\overline{n-1}A\ cof.nA.$

Mais (§. XIX.) ces Diftances, comptées dans le même fens, font

$$AB\ (cof.\,2A$$
$$cof.\,2A + cof.\,4A$$
$$cof.\,2A + cof.\,4A + cof.\,6A$$
$$\vdots$$
$$cof.\,2A + cof.\,4A + cof.\,6A + \ldots\ cof.\,\overline{2n-2}A.$$

Donc, fubftituant à AB fa valeur $D\,fin.\,A$; on doit avoir l'Equation,

$$fin.\,A\ (cof.2A + cof.4A + cof.6A + \ldots cof.\overline{2n-2}A = fin.\overline{n-1}A\ cof.nA$$

Ou, $cof.2A + cof.4A + cof.6A + \ldots cof.\overline{2n-2}A = fin.\overline{n-1}A\ cof.nA\ cofec.A.$

Ce qui eft conforme au §. 260 de l'*Introductio*.

3°. Soit Z le centre du Cercle, & foient menés les Rayons ZA, ZM.

$$ABCDE \ldots MN = ABCDE \ldots MNZA - AZM.$$
$$= n \times AZB - AZM.$$

Mais, $AZB = AZ^2\ fin.\,A\ cof.\,A$

$$AZM = \tfrac{1}{2} AZ^2\ fin.\,2nA.$$

Donc, $2ABCDE \ldots MN = AZ^2\ (2n\ fin.\,A\ cof.\,A - fin.\,2nA$

$$= AZ^2\ (n\ fin.\,2A - fin.\,2nA.$$

Mais (§. VIII.) $2ABCDE \ldots MN$

$$
\begin{aligned}
= AB^2 (&\sin.2A + \sin.4A + \sin.6A \ldots \sin.2n-2A \\
&\sin.2A + \sin.4A + \sin.6A \ldots \sin.2n-4A \\
&\sin.2A + \sin.4A + \sin.6A \ldots \sin.2n-6A \\
&\vdots \\
&\sin.2A + \sin.4A \\
&\sin.2A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= AB^2 (&\sin.1A \sin.2A \operatorname{cosec}.A \\
&\sin.2A \sin.3A \operatorname{cosec}.A \\
&\sin.3A \sin.4A \operatorname{cosec}.A \\
&\vdots \\
&\sin.n-1A \sin.nA \operatorname{cosec}.A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \tfrac{1}{2} AB^2 \operatorname{cosec}.A (&\cos.A - \cos.3A \\
&\cos.A - \cos.5A \\
&\cos.A - \cos.7A \\
&\vdots \\
&\cos.A - \cos.2n-1A
\end{aligned}
$$

$$= \tfrac{1}{2} AB^2 \operatorname{cosec}.A (n \cos.A - (\cos.A + \cos.3A + \cos.5A + \cos.7A \ldots \cos.2n-1A)$$

Substituant à AB sa valeur $2AZ \sin.A$; on trouve $\tfrac{1}{2}AB^2 \operatorname{cosec}.A = 2AZ^2 \sin.A$; & pour que les deux Expressions de la Surface s'accordent, il faut qu'on ait l'Equation $2\sin.A (\cos.A + \cos.3A + \cos.5A + \ldots\ldots \cos.2n-1A = \sin.2nA$. Ce qu'il est facile d'obtenir par le §. 260 de l'*Introductio*.

§. XXI. On pourroit tirer plusieurs autres conséquences de toutes les Propositions que je viens d'établir : je me contenterai d'en indiquer une tout particuliérement rélative à la Pratique.

Quand on se propose de réduire en un Triangle une Figure rectiligne : on a coutume de la réduire en un Triangle qui ait son Sommet à un des Sommets de la Figure, & dont la Base soit sur un des Côtés de cette Figure. Pour cet effet, on s'appuie sur la trente-huitième Proposition du premier Livre des Elémens d'Euclide ; & on ôte à cette Figure successivement un Côté sans changer sa Surface ; jusqu'à ce qu'on ait réduit le nombre de ses Côtés au nombre irréductible, trois. Cette opération, infiniment simple & élégante dans la Théorie, devient inapplicable à la Pratique, pour peu que le nombre des Côtés soit considérable. Les opérations intermédiaires & successives qu'elle exige, dépendant les unes des autres ; le résultat final est d'autant plus incertain que leur nombre est plus grand. Les Propositions précédentes donnent immédiatement les grandeurs de la hauteur & de la base du Triangle égal à la Figure proposée ; c'est-à-dire, des Elémens desquels seuls dépend sa grandeur.

En effet,

En effet, ſoit A le Sommet de la Figure qui doit être le Sommet du Triangle égal à elle ; & ſoit MN le Côté de la Figure ſur l'alignement duquel doit être la Baſe du Triangle cherché. On peut calculer (§. XIV) la Perpendiculaire abaiſſée du Sommet A ſur le Côté MN. *Item*, on peut calculer les Surfaces des Parties retranchées par les Diagonales AM, AN (§. VIII) ; & partant trouver les Baſes des Triangles égaux à ces Parties & ayant la même hauteur que le Triangle AMN. Donc, on peut calculer la Baſe du Triangle égal à la Figure propoſée & de même hauteur que le Triangle AMN.

Il eſt connu ; que la connoiſſance de cette Baſe eſt préliminaire à un grand nombre d'opérations qu'on peut ſe propoſer ſur les Figures rectilignes. En particulier, on en tire la manière de diviſer (géométriquement) une Figure rectiligne en un nombre propoſé de Parties égales entr'elles ou ayant entr'elles des Rapports donnés. Je n'ai pas beſoin d'avertir ; que, pour le calcul numérique, les Propoſitions précédentes rendent ſuperflue la recherche de cette Baſe, pour en tirer la Diviſion de la Figure.

§. XXII. Toutes les Propoſitions que j'ai établies juſqu'à préſent ſur la meſure de la Surface d'une Figure rectiligne, reviennent à décompoſer cette Figure en Triangles, ayant pour Sommet commun un des Sommets de la Figure, & pour Baſes ſes Côtés non-adjacens à ce Sommet ; en calculant les Perpendiculaires abaiſſées de ce Sommet ſur ces Côtés. Je paſſe à un autre procédé pour calculer cette Surface. Il conſiſte à abaiſſer des Perpendiculaires de tous les Sommets de la Figure, ſur un des Côtés ſeulement. Par-là, la Figure eſt décompoſée en deux Triangles rectangles adjacens aux Extrêmités de ce Côté ; & en Trapèzes, dont deux Côtés ſont parallèles ſavoir perpendiculaires à ce Côté, & dont les autres Côtés ſont, un Côté de la Figure, & la Partie du premier Côté compriſe entre ces Perpendiculaires. Or, dans les §§. XVII & XVIII, j'ai eſtimé, tant ces Perpendiculaires, que les Parties de la Baſe compriſes entr'elles. Donc, on peut eſtimer les Surfaces de ces deux Triangles & de tous les Trapèzes.

Premier Exemple. Soit ABC un Triangle. Soit abaiſſée du Sommet B ſur la Baſe AC la Perpendiculaire Bb. On obtient, en ſuivant ce procédé ; $\begin{matrix} Ab = AB \cos. 180^\circ - A \\ Cb = BC \cos. 180^\circ - C \end{matrix}$ Fig. VI.

Et $Bb = \begin{matrix} AB \sin. A \\ BC \sin. C \end{matrix}$ Donc, $2ABC = AB^2 \sin. A \cos. 180^\circ - A + BC^2 \sin. C \cos. 180^\circ - C$.

On ramène aiſément cette Expreſſion à l'Expreſſion plus ſimple $AB \times BC \sin. B$; en ſubſtituant à BC ſa valeur qui eſt $AB \times \frac{\sin. A}{\sin. C}$; & en obſervant que $\sin. B = \sin. A + C = \sin. A \cos. C + \cos. A \sin. C$.

Omettant ſucceſſivement chaque Côté dans cette Expreſſion de la Surface d'un Triangle ; on peut en tirer quelques Théorêmes, auxquels je ne crois pas devoir m'arrêter.

Fig. VII. *Second Exemple.* Soit $ABCD$ un Quadrilatère ; des Sommets B & C duquel on a abaissé sur la Base AD les Perpendiculaires Bb, Cc.

$$\begin{array}{ll} Bb = AB \text{ fin. } A \\ Cc = CD \text{ fin. } D \end{array}; \quad \begin{array}{l} Ab = AB \text{ cof. } 180^\circ - A \\ bc = BC \text{ cof. } 180^\circ - (A+B \\ Dc = CD \text{ cof. } 180^\circ - D. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2ABb = & AB^2 \text{ fin. } A \text{ cof. } 180^\circ - A \\ 2BbcC = & (AB \text{ fin. } A + CD \text{ fin. } D) \times BC \text{ cof. } 180^\circ - (A+B) \\ 2CDc = & CD^2 \text{ fin. } D \text{ cof. } 180 - D \end{array}$$

De-là, $$\begin{array}{lll} 2ABCD = & AB^2 & \text{fin. } A \text{ cof. } 180^\circ - A \\ & AB \times BC & \text{fin. } A \text{ cof. } 180^\circ - (A+B \\ & BC \times CD & \text{fin. } D \text{ cof. } 180^\circ - (D+C) \\ & CD^2 & \text{fin. } D \text{ cof. } 180^\circ - D. \end{array}$$

Je ne m'arrête pas à montrer la convenance de cette Expression avec celle qui est tirée du §. VIII, ni à développer les différentes Propositions qui découlent des comparaisons des Expressions qu'on obtient en omettant successivement chaque Côté du Quadrilatère.

Fig. VIII. *Troisième Exemple.* Soit $ABCDE$ un Pentagone dont AE est la Base, & C le Sommet. Soient Bb, Cc, Dd, perpendiculaires à AE.

$$Bb = AB \text{ fin. } A$$

$$Cc = \begin{array}{l} AB \text{ fin. } A \\ BC \text{ fin. } A+B \end{array} = \begin{array}{l} ED \text{ fin. } E \\ DC \text{ fin. } E+D \end{array}$$

$$Dd = ED \text{ fin. } E$$

$$Ab = AB \text{ cof. } 180^\circ - A$$

$$bc = BC \text{ cof. } 180^\circ - (A+B$$

$$cd = DC \text{ cof. } 180^\circ - (E+D$$

$$dE = DE \text{ cof. } 180^\circ - E$$

$$\begin{array}{llll} 2ABb = & AB^2 & \text{fin. } A & \text{cof. } 180^\circ - A \\ 2BbcC = & 2AB \times BC & \text{fin. } A & \text{cof. } 180^\circ - (A+B \\ & BC^2 & \text{fin. } A+B & \text{cof. } 180^\circ - (A+B \\ 2CcdD = & CD^2 & \text{fin. } E+D & \text{cof. } 180^\circ - (E+D \\ & 2CD \times DE & \text{fin. } E & \text{cof. } 180^\circ - (E+D \\ 2DEd = & DE^2 & \text{fin. } E & \text{cof. } 180^\circ - E. \end{array}$$

Ces Exemples suffisent pour conduire à la Loi des Expressions des Surfaces des Figures rectilignes déterminées par ce procédé.

Soient A, B, C, D, - - - - L, M, N, des Sommets ſucceſſifs des Angles de la Figure, juſqu'au Sommet N de cette Figure. En abaiſſant du Sommet N ſur la Baſe dont A eſt l'Extrêmité la Perpendiculaire Nn ; on obtient l'Equation ſuivante

$$
\begin{array}{lrl}
2ABCD\cdots LMNn = & AB^2\ \mathit{ſin}.A & \mathit{coſ}.\,180^\circ - A \\
& 2AB\ \mathit{ſin}.A \times BC & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B \\
& CD & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B+C \\
& \vdots & \\
& LM & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B+C+\cdots L \\
& MN & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B+C+\cdots M \\
& BC^2\ \mathit{ſin}.A+B & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B \\
& 2BC\ \mathit{ſin}.\,A+B\times CD & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B+C \\
& \vdots & \\
& LM & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B+C\cdots L \\
& MN & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B+C\cdots M \\
& CD^2 \times \mathit{ſin}.\,A+B+C & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B+C \\
& 2CD \times \mathit{ſin}.\,A+B+C & \\
& \vdots & \\
& LM & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B+C\cdots L \\
& MN & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B+C\cdots M \\
& \vdots & \\
& LM^2\ \mathit{ſin}.A+B+C\cdots L & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B+C\cdots L \\
& 2LM\ \mathit{ſin}.\,A+B+C\cdots L\times MN & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B+C\cdots M \\
& MN^2\ \mathit{ſin}.A+B+C\cdots M & \mathit{coſ}.\,180^\circ - (A+B+C\cdots M
\end{array}
$$

On calculeroit de la même manière la Partie ſituée de l'autre côté de la Perpendiculaire Nn : abaiſſée du Sommet N.

Au reſte, ce n'eſt que pour la commodité, pour diminuer le nombre des Termes, & pour éviter quelques Expreſſions négatives, que j'indique la diſtinction de Sommet. La Loi qui a lieu depuis une des Extrêmités de la Baſe juſqu'au Sommet de la Figure, ayant lieu également pour tous les Côtés de la Figure, & s'étendant au-delà du Sommet juſqu'à l'autre Extrêmité de la Baſe.

Si on veut eſtimer une Figure rectiligne par ce procédé (moins ſimple que le premier §. VIII) ; je crois qu'il convient de la décompoſer en deux Parties par une Diagonale de part & d'autre de laquelle les nombres des Côtés ſoient égaux ou différens ſeulement d'une unité ; en calculant préliminairement les Angles formés par cette Diagonale & les Côtés adjacens.

Remarque. Je ne m'arrête pas à l'énoncé des Théorêmes qui découlent de ces Expreſſions, comparées entr'elles ſuivant qu'on regarde comme Baſes différens Côtés, ou ſuivant qu'on la décompoſe différemment par une Diagonale, ou comparées avec celles du §. VIII. Je laiſſe ce travail à ceux de mes Lecteurs qui ſeront curieux de cette recherche.

§. XXIII. Dans tout ce qui précède, je ne me ſuis occupé que des Figures de la première Claſſe, conformément à ce que j'ai annoncé dans le §. IV. Je vais auſſi m'occuper des Figures de la ſeconde Claſſe; ſavoir, de celles qui ont un ou quelques Angles rentrans. Dans cet Examen, je procéderai comme pour les Figures de la première Claſſe, en introduiſant par des Exemples particuliers aux Formules générales.

Dans les Figures de la première Claſſe, un Angle extérieur eſt l'Excès de deux Droits ſur l'Angle intérieur qui lui eſt adjacent. Dans les Figures de la ſeconde Claſſe, l'Angle extérieur répondant à un Angle rentrant, eſt l'Excès de cet Angle rentrant ſur deux Droits. Dans les Figures de la première Claſſe, la ſomme des Angles extérieurs vaut quatre Droits; dans les Figures de la ſeconde Claſſe, l'excès de la ſomme des Angles extérieurs adjacens à des Angles ſaillans, ſur la ſomme des Angles extérieurs adjacens à des Angles rentrans, vaut quatre Droits. (Voyez le bel Ouvrage élémentaire de M. le Profeſſeur BERTRAND, T. II, p. 30). Savoir, la Propoſition qui a lieu pour les Figures de la première Claſſe, s'applique aux Figures de la ſeconde Claſſe, en changeant le ſigne des Angles extérieurs répondans aux Angles rentrans. Nous allons trouver, que c'eſt auſſi-là le ſeul changement à faire aux Formules démontrées ſur les Figures de la première Claſſe, pour qu'elles s'appliquent aux Figures de la ſeconde Claſſe.

Fig. IX. *Premier Exemple.* Soit $ABCD$ un Quadrilatère ayant un Angle rentrant en B. Que le Côté AB rencontre en C' le Côté CD.

$$ABCD = AC'D+BCC'$$

$$\text{Donc, } 2ABCD = AC'\times C'D\ \text{ſin}.\,C'+BC'\times C'C\ \text{ſin}.\,C'$$

$$= (AB+BC')(CD-C'C)\ \text{ſin}.\,C'+BC'\times C'C\ \text{ſin}.\,C'$$

$$\begin{array}{lll} = AB\times CD\ \text{ſin}.\,C' = & AB\times CD\ \text{ſin}.\,C-B = & AB\times BC\ \text{ſin}.-B \\ -AB\times C'C\ \text{ſin}.\,C' & -AB\times BC\ \text{ſin}.\,B & AB\times CD\ \text{ſin}.-B+C \\ +BC'\times CD\ \text{ſin}.\,C' & +BC\times CD\ \text{ſin}.\,C & BC\times CD\ \text{ſin}.\,C \end{array}$$

Partant, la Formule pour l'Expreſſion de la Surface d'un Quadrilatère ayant un Angle rentrant, eſt la même que la Formule pour un Quadrilatère de la première Claſſe (§§. V & VIII), en changeant le ſigne de l'Angle extérieur adjacent à l'Angle rentrant.

2°. Des Sommets B & C ſoient abaiſſées ſur AD les Perpendiculaires Bb, Cc; & ſoit Bc' perpendiculaire à Cc. On trouve aiſément, que $CBc' = 180^\circ-(A-B)$, & $\text{ſin}.\,CBc' = \text{ſin}.\,A-B$

$$Cc' = BC\ \text{ſin}.\,A-B$$

$$Bb = AB\ \text{ſin}.\,A$$

$$Cc = CD\ \text{ſin}.\,D = CD\ \text{ſin}.\,360^\circ-(A-B+C = -CD\ \text{ſin}.\,A-B+C.$$

Donc,

Donc, AB *fin.* A
BC *fin.* $A-B = -CD$ *fin.* $A-B+C$
ou, AB *fin.* A
BC *fin.* $A-B$
CD *fin.* $A-B+C = 0$. Conformément au §. XV, en changeant le figne de l'Angle B.

3°. $Ab = AB$ *cof.* $180° - A$
$bc = BC$ *cof.* $180° - (A-B$
$cD = CD$ *cof.* $180° - D = CD$ *cof.* $A-B+C-180°$
$= CD$ *cof.* $180° - (A-B+C$.

Donc, $AD = AB$ *cof.* $180° - A$
BC *cof.* $180° - (A-B$
CD *cof.* $180° - (A-B+C$. Conformément au §. XIX, en changeant le figne de l'Angle B.

4°. $ABCD = ABb + BbcC + CcD$.

Donc, $2ABCD = AB^2$ *fin.* A *cof.* $180° - A$
$(AB$ *fin.* $A + BC$ *fin.* $A-B) BC$ *cof.* $180 - (A-B$
CD^2 *fin.* D *cof.* $180° - D$
$= AB^2$ *fin.* A *cof.* $180° - A$
$AB \times BC$ *fin.* A *cof.* $180° - (A-B$
BC^2 *fin.* $A-B$ *cof.* $180° - (A-B$
CD^2 *fin.* D *cof.* $180° - D$. (Voyez le §. XXII.)

Remarque. Dans toutes ces Equations ; fi on omettoit l'Angle rentrant en B, on trouveroit pour les Figures de la feconde Claffe précifément les mêmes Expreffions que pour celles de la première.

Second Exemple. Soit $ABCDE$ un Pentagone ayant un Angle rentrant en C. Que les Côtés AB, DC, fe rencontrent en B' Fig. X.

$ABCDE = AB'DE + B'BC$.

Donc, $2ABCDE = AB' \times B'D$ *fin.* $B' + BB' \times B'C$ *fin.* B'
$AB' \times DE$ *fin.* $B'+D$
$B'D \times DE$ *fin.* D
$= (AB - BB')(B'C + CD)$ *fin.* $B' + BB' \times B'C$ *fin.* B'
$(AB - BB') DE$ *fin.* $B'+D$
$(B'C + CD) DE$ *fin.* D

$$\begin{array}{ll}
= AB \times B'C \sin B' & = AB \times BC \sin B \\
 AB \times CD \sin B' & AB \times CD \sin B-C \\
-BB' \times CD \sin B' & -BC \times CD \sin C \\
 AB \times DE \sin B'+D & AB \times DE \sin B-C \\
-BB' \times DE \sin B'+D & -BC \times DE \sin B-C+D \times \frac{\sin C}{\sin B-C} \\
 B'C \times DE \sin D & BC \times DE \sin D \times \frac{\sin B}{\sin B-C} \\
 CD \times DE \sin D & CD \times DE \sin D
\end{array}$$

Or (§. II. 2°.); $\sin B \sin D - \sin C \sin B-C+D = \sin B-C \sin D-C$.

Donc; $$2ABCDE = \begin{array}{l} AB \times BC \sin B \\ CD \sin B-C \\ DE \sin B-C+D \\ BC \times CD \sin -C \\ DE \sin -C+D \\ CD \times DE \sin D \end{array}$$

2°. Soient Bb, Cc, Dd, perpendiculaires à AE. Et soient Bc', Cd', perpendiculaires à Cc, Dd.

$$\begin{array}{lll}
Bb & = AB \sin A & \\
Cc & = cc' - Cc' = Bb - Cc' & \\
 & = AB \sin A & \\
 & -BC \sin A+B-180° & \\
 & = AB \sin A & \\
 & BC \sin A+B & \\
Dd & = Cc + Dd' = AB \sin A & \\
 & BC \sin A+B & \\
 & CD \sin A+B-C & = DE \sin E \\
 & & = DE \sin 360° - (A+B-C+D) \\
 & & = -DE \sin A+B-C+D.
\end{array}$$

Donc; $$\begin{array}{l} AB \sin A \\ BC \sin A+B \\ CD \sin A+B-C \\ DE \sin A+B-C+D = 0. \end{array}$$

3°. $$\begin{array}{lll}
Ab & = & AB \cos 180° - A \\
bc & = & BC \cos A+B-180° \\
 & = & BC \cos 180° - (A+B \\
cd & = & CD \cos 180° - (A+B-C \\
dE & = & DE \cos 180° - E \\
 & = & DE \cos 180° - (A+B-C+D.
\end{array}$$

Donc; $$AE = \begin{array}{l} AB \cos 180° - A \\ BC \cos 180° - (A+B \\ CD \cos 180° - (A+B-C \\ DE \cos 180° - (A+B-C+D. \end{array}$$

4°. Enfin, ſi on exprime la ſurface de ce Pentagone, en le regardant comme compoſé des Parties *ABb*, *BbcC*, *CcdD*, *DdE*; on trouve encore que ſon Expreſſion ne differe de celle qui a lieu pour les Pentagones de la première Claſſe, que par le ſigne de l'Angle *C*.

Exemple troiſième. Je prendrai pour dernier Exemple, un Hexagone ayant deux Angles rentrans en *B* & *E*. Que les Côtés *AB*, *DC*, ſe rencontrent en *C'*. Fig. XI.

$$ABCDEF = AC'DEF + BCC'$$

Donc, $2ABCDEF = \begin{array}{l} AC'\times C'D \ \sin.C' \\ \qquad\quad DE \ \sin.C'+D \\ \qquad\quad EF \ \sin.C'+D-E \\ C'D\times DE \ \sin.D \\ \qquad\quad EF \ \sin.D-E \\ DE\times EF \ \sin.-E \end{array} \quad + BC'\times C'C \ \sin.C'$

$$\begin{array}{lcl}
\text{Or; } AC'\times C'D \ \sin.C' + BC'\times C'C \ \sin.C' & = & AB\times BC \ \sin.-B \\
 & & AB\times CD \ \sin.-B+C \\
 & & BC\times CD \ \sin.C \\
AC'\times DE \ \sin.C'+D & = & AB\times DE \ \sin.-B+C+D \\
 & & BC\times DE \ \sin.-B+C+D \times \frac{\sin.C}{\sin.-B+C}. \\
AC'\times EF \ \sin.C'+D-E & = & AB\times EF \sin.-B+C+D-E \\
 & & BC\times EF \sin.-B+C+D-E \ \frac{\sin.C}{\sin.-B+C}. \\
C'D\times DE \ \sin.D & = & CD\times DE \sin.D \\
 & & -BC\times DE \sin.D \times \frac{\sin.B}{\sin.-B+C}. \\
C'D\times EF \ \sin.D-E & = & CD\times EF \ \sin.D-E \\
 & & -BC\times EF \ \sin.D-E \times \frac{\sin.B}{\sin.-B+C}.
\end{array}$$

Or (§. II. 2°.) le Coefficient de $BC\times DE$ eſt $\sin.C+D$
& le Coefficient de $BC\times EF$, eſt $\sin.C+D-E$.

Donc, faiſant ces ſubſtitutions, & diſpoſant les Termes dans l'ordre convenable

$$2ABCDEF = \begin{array}{l}
AB\times BC \ \sin.-B \\
\qquad\ \ CD \ \sin.-B+C \\
\qquad\ \ DE \ \sin.-B+C+D \\
\qquad\ \ EF \ \sin.-B+C+D-E \\
BC\times CD \ \sin.C \\
\qquad\ \ DE \ \sin.C+D \\
\qquad\ \ EF \ \sin.C+D-E \\
CD\times DE \ \sin.D \\
\qquad\ \ EF \ \sin.D-E \\
DE\times EF \ \sin.-E.
\end{array}$$

On trouve de même, que les Expreſſions des Perpendiculaires abaiſſées des Sommets B, C, D, E ſur le Côté AF, diffèrent des Expreſſions des mêmes Droites pour les cas où la Figure n'a que des Angles ſaillans ; uniquement par les ſignes des Angles extérieurs adjacens aux Angles rentrans.

En particulier, on obtient les deux Equations

$$\begin{array}{lcl} AB\ \text{ſin.}\ A & AF = & AB\ \text{coſ.}\ 180^\circ - A \\ BC\ \text{ſin.}\ A-B & & BC\ \text{coſ.}\ 180^\circ - (A-B \\ CD\ \text{ſin.}\ A-B+C & & CD\ \text{coſ.}\ 180^\circ - (A-B+C \\ DE\ \text{ſin.}\ A-B+C+D & & DE\ \text{coſ.}\ 180^\circ - (A-B+C+D \\ EF\ \text{ſin.}\ A-B+C+D-E = 0. & & EF\ \text{coſ.}\ 180^\circ - (A-B+C+D-E. \end{array}$$

Ces Exemples me paroiſſent tout au moins ſuffiſans pour établir la Propoſition générale : Que tout ce qui a été démontré pour les Figures de la première Claſſe, eſt vrai pour les Figures de la ſeconde Claſſe, en faiſant précéder du ſigne de la ſouſtraction les Angles extérieurs adjacens aux Angles rentrans. La Démonſtration de cette Propoſition générale n'a aucune difficulté, en ſuivant un procédé analogue à celui qui eſt contenu dans le §. VIII.

§. XXIV. Il eſt une Propriété remarquable (quoique bien connue) des Figures rectilignes rélativement à leur Surface ; dont je crois convenable de montrer la liaiſon avec les Propoſitions que j'ai établies. Savoir, ſi d'un Point quelconque pris dans l'intérieur de la Figure on mène des droites à tous ſes Sommets ; de manière qu'on l'ait décompoſée en Triangles ayant ce Point pour Sommet commun & pour Baſes les Côtés de la Figure ; la ſurface de la Figure eſt égale à la ſomme de tous ces Triangles.

Je dois donc montrer : Que l'Expreſſion de la ſomme des ſurfaces de tous ces Triangles, eſt indépendante de la poſition du Point qui eſt leur Sommet commun. Or, pour trouver l'Expreſſion de cette Somme, je dois trouver en particulier les Expreſſions des Perpendiculaires abaiſſées de ce Point ſur tous les Côtés de la Figure, dans les Quantités ſuffiſantes pour déterminer ſa poſition ; par exemple, dans ſa diſtance à l'un des Sommets, & dans l'Angle que la Droite menée à ce Sommet fait avec un des Côtés qui lui ſont adjacens. Partant, je vais m'occuper de la recherche des Expreſſions de ces Perpendiculaires.

Fig. XII. *Lemme.* Soient des Droites en nombre quelconque, $ZA, ZB, ZC, ZD \cdots ZM, ZN$; qui partent d'un même Point, données de poſition ſur un Plan. Connoiſſant, tant la Diſtance YZ d'un Point Y au Point Z, que l'Angle YZA que la Droite YZ fait avec l'une ZA des Droites données de poſition : On peut connoître les Diſtances de ce Point Y à chacune des Droites reſtantes données de poſition.

Que

Que les Angles $YZA, YZB, YZC, YZD, \ldots YZM, YZN$, soient tous comptés dans un même sens rélativement à la Droite ZY.

Les Angles YZB, YZC, YZD, ... YZM, YZN, seront respecti-vement $YZA+AZB, YZA+AZC, YZA+AZD, \ldots YZA+AZM, YZA+AZN$.

Soient Ya, Yb, Yc, Yd, ... Ym, Yn, les Perpendiculaires abaissées du Point Y sur les Droites . . . . ZA, ZB, ZC, ZD, ... ZM, ZN; ces Perpendiculaires seront respectivement les Sinus des Angles . . . . YZA, YZB, YZC, YZD, ... YZM, YZN, rélativement à la Droite ZY prise pour Sinus total. Ces Perpendiculaires sont donc exprimées comme il suit :

$$Ya = ZY \text{ fin.} YZA$$
$$Yb = ZY (\text{fin.} YZA \text{ cof.} AZB + \text{cof.} YZA \text{ fin.} AZB$$
$$Yc = ZY (\text{fin.} YZA \text{ cof.} AZC + \text{cof.} YZA \text{ fin.} AZC$$
$$Yd = ZY (\text{fin.} YZA \text{ cof.} AZD + \text{cof.} YZA \text{ fin.} AZD$$
$$\vdots$$
$$Ym = ZY (\text{fin.} YZA \text{ cof.} AZM + \text{cof.} YZA \text{ fin.} AZM$$
$$Yn = ZY (\text{fin.} YZA \text{ cof.} AZN + \text{cof.} YZA \text{ fin.} AZN.$$

Remarque. Si une ou quelques-unes des Droites données de position sont situées de deux Côtés différens rélativement à la Droite ZY; les Angles formés par ces Droites & par la Droite ZA changent de signe ; leurs Sinus changent donc aussi de signe, mais leurs Cosinus conservent leur signe. Les Perpendiculaires abaissées sur ces Côtés devenant les Sinus d'Angles qui ont aussi changé de signe : ces Perpendiculaires elles-mêmes changent de signe ; & partant, on doit changer seulement le signe du premier Terme de leurs Expressions.

Exemple. Soit ZY entre ZA & ZB ; on obtient

$$Yb = ZY (\text{fin.} AZB \text{ cof.} AZY - \text{cof.} AZB \text{ fin.} AZY).$$

Application. Soit une Figure rectiligne $ABCD---MN$; donnée de grandeur & d'espèce : Soit Y un Point dans l'intérieur de cette Figure. Soit prolongée NA indéfiniment en A', & soient AC', AD', AE', ... AM', AN', respectivement parallèles aux Côtés BC, CD, DE, ... LM, MN, de manière que les Angles $A'AB$, $A'AC'$ $A'AD'$, $A'AE'$ ... $A'AM'$, $A'AN'$, comptés dans un même sens, aillent successivement en croissant. Fig. XIII.

Les Expreſſions des Angles $A'AB$ ſont reſpectivement A

$$
\begin{array}{ll}
A'AB & A \\
A'AC' & A+B \\
A'AD' & A+B+C \\
A'AE' & A+B+C+D \\
\vdots & \\
A'AM' & A+B+C+D \ldots\ldots L \\
A'AN' & A+B+C+D \ldots\ldots L+M
\end{array}
$$

Que les Diſtances du Sommet A, aux Côtés BC, CD, DE . . . . LM, MN, ſoient reſpectivement . . . . $A\gamma$, $A\delta$, $A\epsilon$, ... $A\mu$, $A\nu$.

Que les Diſtances du Point Y, aux Côtés NA, AB, BC, CD, DE, ... LM, MN, ſoient reſpectivement . . . . Ya, Yb, Yc, Yd, Ye, ... Ym, Yn; & que les Diſtances du même Point aux Parallèles . . AC', AD', AE', ... AM', AN', ſoient auſſi reſpectivement . . . . Yc', Yd', Ye', ... Ym', Yn'.

On obtient;

$$
\begin{array}{lcl}
Ya = AY \times \sin. A'AY & = & AY \sin. A'AY \\
Yb = AY \times \sin. BAY & = & AY \sin.(A'AY - A \\
Yc' = AY \times \sin. C'AY & = & AY \sin.(A'AY - (A+B \\
Yd' = AY \times \sin. D'AY & = & AY \sin.(A'AY - (A+B+C \\
\vdots & & \\
Ym' = AY \times \sin. M'AY & = & AY \sin.(A'AY - (A+B+C \ldots. L \\
Yn' = AY \times \sin. N'AY & = & AY \sin.(A'AY - (A+B+C \ldots. M.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcll}
Ya & = & AY \sin. A'AY & \\
Yb & = & AY \sin.(A'AY - A & \\
Yc & = & AY \sin.(A'AY - (A+B & + A\gamma \\
Yd & = & AY \sin.(A'AY - (A+B+C & + A\delta \\
\vdots & & & \\
Ym & = & AY \sin.(A'AY - (A+B+C+ \ldots, L & + A\mu \\
Yn & = & AY \sin.(A'AY - (A+B+C \ldots. M & + A\nu
\end{array}
$$

Soient pris les Rectangles des Perpendiculaires . . . . Ya, Yb, Yc, Yd, ... Ym, Yn; par les Côtés . . . . NA, AB, BC, CD, ... LM, MN; & ſoit priſe la Somme de ces Rectangles.

On obtient:

$$
\begin{array}{ll}
2ABCD \ldots MN = 1^{\circ}.\ AY \sin. A'AY \times & NA \\
& AB \cos. A \\
& BC \cos. A+B \\
& CD \cos. A+B+C \\
& \vdots \\
& LM \cos. A+B+C+ \ldots L \\
& MN \cos. A+B+C+ \ldots. M
\end{array}
$$

2°. $-AY \cos. A'AY \times AB \sin. A$

$BC \sin. A+B$

$CD \sin. A+B+C$

$\vdots$

$LM \sin. A+B+C \ldots\ldots L$

$MN \sin. A+B+C \ldots\ldots M$

3°. $BC \times A\gamma$

$CD \times A\delta$

$\vdots$

$LM \times A\mu$

$MN \times A\nu$

Or (§§.XV & XIX); les Coefficiens des deux Termes, $AY \sin. A'AY$, $AY \cos. A'AY$; sont l'un & l'autre zéro. Donc, les deux premières Parties de cette Expression évanouissent; ou l'Expression de la Surface ne dépend point de la position du Point Y qui est le Sommet commun des Triangles dans lesquels on décompose la Figure.

Remarque. Le procédé & la démonstration sont les mêmes, lorsque le Point Y est situé hors de la Figure. Dans ce cas, la Figure est l'Excès de la Somme des Triangles ayant leur Sommet commun au Point Y, de manière que ce Point est dans l'un au moins des Angles intérieurs de la Figure adjacens aux Côtés qui sont les Bases de ces Triangles; sur la Somme des Triangles ayant leur Sommet au même Point, de manière que ce Point est hors de chacun des Angles intérieurs de la Figure adjacens aux Bases de ces Triangles. Je ne m'arrête pas à poursuivre l'Examen des différentes Positions de ce Point; il ne peut avoir d'autre difficulté que celle de la longueur.



CHAPITRE SECOND.

Calculs des Côtés & des Angles inconnus d'une Figure rectiligne, dans les Côtés & les Angles connus en nombre suffisant pour la déterminer.

§. XXV. DANS le Chapitre précédent, j'ai déterminé la Surface d'une Figure rectiligne dans ses Côtés & ses Angles, en faisant entrer quelquefois dans l'Expression de cette Surface des Quantités en nombre plus grand que n'est celui des Côtés & des Angles nécessaires pour la déterminer. Par exemple, dans le §. IX, j'ai déterminé la Surface dans tous les Côtés & dans tous les Angles, exceptés deux; & dans le §. XXII, j'ai déterminé la Surface dans tous les Côtés, excepté un; & dans tous les Angles, aussi excepté un. Cependant, une Figure rectiligne est déterminée dans ses Côtés & ses Angles, en omettant, ou deux Côtés, ou un Côté & deux Angles, ou trois Angles. Partant, lorsqu'on veut déterminer la Surface d'une Figure rectiligne dans ses Côtés & ses Angles, en nombre plus grand que celui qui suffit pour la déterminer; il faut avant tout rechercher si ces Quantités peuvent s'accorder les unes avec les autres, ou si elles ne sont point contradictoires. Sans cette recherche préliminaire, on s'exposeroit à faire en pure perte de longs calculs qui ne sauroient s'appliquer à aucun objet.

La recherche des Côtés & des Angles d'une Figure, inconnus, mais déterminés par les Côtés & les Angles restans connus, est à plusieurs autres égards un objet qui mérite l'attention des Mathématiciens. On ne peut douter qu'elle ne serve dans la Géométrie pratique. Il arrive fréquemment que le moyen le plus convenable de lever le Plan d'un Terrein (d'une Forêt, d'une Ville, par exemple) est de l'environner d'un Polygone, aux Côtés duquel on rapporte ses Points principaux. Et il faut avant tout apporter la plus grande exactitude dans la mesure des Côtés & des Angles de ce Polygone, vérifier ces mesures, & voir si elles s'accordent les unes avec les autres. Quelques Praticiens se contentent de vérifier la somme de tous les Angles, en voyant si elle s'accorde avec la valeur déterminée par le nombre des Côtés. Mais, outre qu'il peut se glisser dans la mesure des Angles des erreurs opposées qui se détruisent ou approchent de se détruire dans l'addition: cette vérification n'apprend rien sur l'exactitude des mesures des Côtés, dont il n'est pas moins important de s'assurer, qu'il ne l'est de s'assurer de celle des Angles.

Je

Je ne répéterai pas ici ce que j'ai dit dans l'Introduction fur l'utilité d'une Polygonométrie, indépendante de la Trigonométrie fimple, foit qu'on l'envifage rélativement à la Pratique ou rélativement à la Théorie; & je paffe immédiatement à l'expofition des différens cas qu'elle préfente.

§. XXVI. La Trigonométrie renferme trois cas généraux (dont un feulement eft fufceptible de fubdivifion). De même, la Polygonométrie fournit trois cas généraux, tous fufceptibles de fubdivifion, mais en même tems foumis aux mêmes règles générales.

1°. Un Triangle eft déterminé par deux Côtés & un Angle; ou ce qui revient au même, par fes Côtés excepté un, & par fes Angles exceptés deux.

De même, une Figure rectiligne eft déterminée par fes Côtés excepté un, & par fes Angles exceptés deux.

Dans un Triangle, les deux Angles inconnus font adjacens l'un & l'autre au Côté inconnu; ou ils ne le font pas l'un & l'autre (l'un d'entr'eux l'étant néceffairement).

Dans une Figure rectiligne quelconque; ou bien, les deux Angles inconnus font l'un & l'autre adjacens au Côté inconnu; ou, l'un d'eux feulement eft adjacent à ce Côté; ou, ni l'un ni l'autre ne lui font adjacens. Dans ces deux derniers cas, les deux Angles inconnus font ou ne font pas adjacens l'un à l'autre.

2°. Un Triangle eft déterminé par un Côté & deux Angles; ou, ce qui revient au même, par fes Côtés exceptés deux & par tous les Angles.

De même, une Figure rectiligne eft déterminée par tous fes Angles, & par fes Côtés exceptés deux.

On pourroit fubdivifer ce cas, fuivant que les Côtés inconnus font ou ne font pas adjacens l'un à l'autre; mais le calcul n'exige pas cette fubdivifion.

3°. Un Triangle eft déterminé par fes trois Côtés; c'eft-à-dire, que les Angles inconnus font au nombre de trois.

De même, une Figure rectiligne eft déterminée par tous fes Côtés, & par tous fes Angles exceptés trois.

On pourroit fubdivifer ce cas fuivant les pofitions de ces Angles les uns à l'égard des autres; favoir, fuivant le nombre des Côtés qui les féparent; mais, le calcul n'exige pas cette fubdivifion.

Premier Problême.

On connoît dans une Figure rectiligne tous les Côtés excepté un, & tous les Angles exceptés deux. On demande ce Côté & ces Angles.

Divifion. Les Angles inconnus font l'un & l'autre adjacens au côté inconnu; ces Angles font adjacens l'un à l'autre, fans l'être au Côté inconnu; enfin, ils ne font pas adjacens l'un à l'autre.

Premier cas du premier Problême.

Les deux Angles inconnus ont pour Jambe commune le Côté inconnu.

§. XXVII. Soit $ABCD----LMN$, une Figure dont on connoît tous les Côtés excepté AN, & tous les Angles exceptés les Angles (extérieurs) A & N. On demande ce Côté & ces Angles.

Par le §. XV

$$\begin{array}{l} AB\ \text{ſin}.A \\ BC\ \text{ſin}.A+B \\ CD\ \text{ſin}.A+B+C \\ \vdots \\ LM\ \text{ſin}.A+B+C+--L \\ MN\ \text{ſin}.A+B+C+---M \end{array} = 0.$$

Donc,

$$\text{ſin}.A\times\begin{array}{l} AB \\ BC\ \text{coſ}.B \\ CD\ \text{coſ}.B+C \\ \vdots \\ LM\ \text{coſ}.B+C---L \\ MN\ \text{coſ}.B+C----M \end{array} + \text{coſ}.A\times\begin{array}{l} \\ BC\ \text{ſin}.B \\ CD\ \text{ſin}.B+C \\ \vdots \\ LM\ \text{ſin}.B+C---L \\ MN\ \text{ſin}.B+C----M \end{array} = 0.$$

De-là, $Tang.\ 180^\circ - A$ ou, $Tang.\ BAN$

$$= \begin{array}{l} BC\ \text{ſin}.B \\ CD\ \text{ſin}.B+C \\ \vdots \\ LM\ \text{ſin}.B+C---L \\ MN\ \text{ſin}.B+C----M \end{array} : \begin{array}{l} AB+BC\ \text{coſ}.B \\ CD\ \text{coſ}.B+C \\ \vdots \\ LM\ \text{coſ}.B+C---L \\ MN\ \text{coſ}.B+C----M. \end{array}$$

On détermine de même l'Angle N, en commençant par les Côtés NM, ML, &c.--

De-là, on détermine le Sinus & le Cosinus de l'Angle A. Savoir, le Sinus de l'Angle A, est égal à une Fraction dont le Numérateur est le Numérateur de la Fraction qui indique la Tangente du Supplément de A, & dont le Dénominateur est la Racine quarrée de la Somme des Quarrés de ses deux Termes; & le Cosinus du Supplément de A est une Fraction ayant le même Dénominateur que la dernière, & dont le Numérateur est le Dénominateur de la première. Savoir, appelant P & Q les Termes de la Fraction qui indique la valeur de la Tangente du Supplément de A, on obtient $\text{ſin}.A = \frac{P}{\sqrt{PP+QQ}}$; $\text{coſ}.180^\circ - A = \frac{Q}{\sqrt{PP+QQ}}$.

§. XXVIII. Remarque.

$$
\begin{array}{lll}
PP+QQ = & AB^2+2AB\times BC\, \cos. B & \\
 & \quad\quad CD \cos. B+C & \\
 & \quad\quad \vdots & \\
 & \quad\quad LM \cos. B+C \cdots L & \\
 & \quad\quad MN \cos. B+C+ \cdots M & \\
 & BC^2+2BC\times CD \cos. C & \\
 & \quad\quad \vdots & \\
 & \quad\quad LM \cos. C+ \cdots L & \\
 & \quad\quad MN \cos. C+ \cdots M & \\
 & CD^2+2CD\times DE \cos. D & \\
 & \quad\quad \vdots & \\
 & \quad\quad LM \cos. D+ \cdots L & \\
 & \quad\quad MN \cos. D+ \cdots M & \\
 & \vdots & \\
 & +LM^2+2LM\times MN \cos. M & \\
 & +MN^2 &
\end{array}
$$

Savoir, la Somme des Quarrés des deux Termes de la Fraction qui exprime la valeur de la Tangente du Supplément de A, est la Somme des Quarrés de tous les Côtés connus & de leurs doubles Rectangles par les Cosinus des Sommes des Angles extérieurs compris entr'eux.

§. XXIX. Connoissant l'Angle A, on peut trouver l'Expression de AN d'après la Formule du §. XVIII.

$$
\begin{array}{ll}
AN = & AB \cos. 180^\circ - A \\
 & BC \cos. 180^\circ-(A+B \\
 & CD \cos. 180^\circ-(A+B+C \\
 & \vdots \\
 & LM \cos. 180^\circ-(A+B+C \cdots L \\
 & MN \cos. 180^\circ-(A+B+C \cdots M
\end{array}
$$

Or,

$$
\begin{array}{ll}
AB\sqrt{PP+QQ} \cos. 180^\circ - A = & AB^2+AB\times BC \cos. B \\
 & \quad CD \cos. B+C \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad LM \cos. B+C \cdots L \\
 & \quad MN \cos. B+C \cdots M
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
BC\sqrt{PP+QQ} \cos. 180^\circ-(A+B = & \quad AB\times BC \cos. B \\
 & BC^2+BC\times CD \cos. C \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad LM \cos. C+D \cdots L \\
 & \quad MN \cos. C+D \cdots M
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
CD\sqrt{PP+QQ}\ \text{cof.}\ 180^{\circ}-(A+B+C = & AB\times CD\ \text{cof.}\ B+C \\
 & BC\times CD\ \text{cof.}\ \quad C \\
 & CD^{2}+CD\times DE\ \text{cof.}\ D \\
 & \vdots \\
 & LM\ \text{cof.}\ D+\cdots L \\
 & MN\ \text{cof.}\ D\cdots\cdots M
\end{array}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{array}{rl}
LM\sqrt{PP+QQ}\ \text{cof.}\ 180^{\circ}-(A+B+C\cdot\cdot L = & AB\times LM\ \text{cof.}\ B+C+\cdots L \\
 & BC\times LM\ \text{cof.}\ \quad C+\cdots L \\
 & \vdots \\
 & KL\times LM\ \text{cof.}\ \quad L \\
 & LM^{2}+LM\times MN\ \text{cof.}\ \quad M
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
MN\sqrt{PP+QQ}\ \text{cof.}\ 180^{\circ}-(A+B+C\cdot\cdot M = & AB\times MN\ \text{cof.}\ B+C+\cdots M \\
 & BC\times MN\ \text{cof.}\ \quad C+\cdots M \\
 & \vdots \\
 & LM\times MN\ \text{cof.}\ \quad M \\
 & MN^{2}
\end{array}
$$

Ajoutant toutes ces Parties, on trouve pour leur Somme $PP+QQ$; & partant $AN=\sqrt{PP+QQ}$. Savoir, le Quarré d'un Côté AN eft égal à la Somme des Quarrés: 1°. de la Somme des Produits des autres Côtés par les Cofinus des Sommes des Angles extérieurs compris entr'eux & l'un des Côtés adjacens au premier; 2°. de la Somme des Produits des mêmes Côtés par les Sinus des mêmes Angles.

Ou bien, ce Quarré eft égal à la Somme des Quarrés de tous les autres Côtés & de leurs doubles Rectangles par les Cofinus des Sommes des Angles extérieurs compris entr'eux.

§. XXX. Cette valeur du Côté AN auroit pu être obtenue immédiatement des Propofitions contenues dans les §§. XV—XVIII, fans avoir befoin de chercher préliminairement le Sinus & le Cofinus d'un des Angles adjacens.

En effet, foient quarrés les deux Membres de chacune des deux Equations

$$
\begin{array}{ll}
AB\ \text{fin.}\ A & AB\ \text{cof.}\ 180^{\circ}-A \\
BC\ \text{fin.}\ A+B & BC\ \text{cof.}\ 180^{\circ}-(A+B \\
CD\ \text{fin.}\ A+B+C & CD\ \text{cof.}\ 180^{\circ}-(A+B+C \\
\vdots & \vdots \\
LM\ \text{fin.}\ A+B+C\cdots\cdots L & LM\ \text{cof.}\ 180^{\circ}-(A+B+C\cdots L \\
MN\ \text{fin.}\ A+B+C+\cdots\cdots M = 0 & MN\ \text{cof.}\ 180^{\circ}-(A+B+C\cdots\cdots M = AN.
\end{array}
$$

Le Quarré de AN eft égal à la Somme des Quarrés des deux premiers Membres; & on trouve en effet pour ce Quarré, la Somme des Quarrés de tous les autres Côtés & de leurs doubles Rectangles par les Cofinus des Sommes des Angles extérieurs compris entr'eux.

§. XXXI.

§. XXXI. Le Quarré de AN peut se présenter de plusieurs autres manières sous la forme de la Somme de deux Quarrés, comme il suit :

$$AN^2 = 1^\circ.\ \left(\begin{array}{l} AB \\ BC\ \cos. B \\ CD\ \cos. B+C \\ DE\ \cos. B+C+D \\ \vdots \\ LM\ \cos. B+C+D \cdots L \\ MN\ \cos. B+C+D \cdots M \end{array}\right)^2 + \left(\begin{array}{l} \text{»} \\ BC\ \sin. B \\ CD\ \sin. B+C \\ DE\ \sin. B+C+D \\ \vdots \\ LM\ \sin. B+C+D \cdots L \\ MN\ \sin. B+C+D \cdots M \end{array}\right)^2$$

$$= 2^\circ.\ \left(\begin{array}{l} AB\ \cos. B \\ BC \\ CD\ \cos. C \\ DE\ \cos. C+D \\ \vdots \\ LM\ \cos. C+D+ \cdots L \\ MN\ \cos. C+D+ \cdots M \end{array}\right)^2 + \left(\begin{array}{l} -AB\ \sin. B \\ \text{»} \\ +CD\ \sin. C \\ DE\ \sin. C+D \\ \vdots \\ LM\ \sin. C+D \cdots L \\ MN\ \sin. C+D \cdots M \end{array}\right)^2$$

$$= 3^\circ.\ \left(\begin{array}{l} AB\ \cos. B+C \\ BC\ \cos. \quad C \\ CD \\ DE\ \cos. D \\ \vdots \\ LM\ \cos. D+ \cdots L \\ MN\ \cos. D+ \cdots M \end{array}\right)^2 + \left(\begin{array}{l} -AB\ \sin. B+C \\ -BC\ \sin. \quad C \\ \text{»} \\ +DE\ \sin. D \\ \vdots \\ LM\ \sin. D+ \cdots L \\ MN\ \sin. D+ \cdots M \end{array}\right)^2$$

$$= 4^\circ.\ \left(\begin{array}{l} AB\ \cos. B+C+D \\ BC\ \cos. \quad C+D \\ CD\ \cos. \quad D \\ DE \\ \vdots \\ LM\ \cos. E+ \cdots L \\ MN\ \cos. E+ \cdots M \end{array}\right)^2 + \left(\begin{array}{l} -AB\ \sin. B+C+D \\ -BC\ \sin. \quad C+D \\ -CD\ \sin. \quad D \\ \text{»} \\ \vdots \\ +LM\ \sin. E+ \cdots L \\ +MN\ \sin. E+ \cdots M \end{array}\right)^2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$= \left(\begin{array}{l} AB\ \cos. B+C+D \cdots L \\ BC\ \cos. \quad C+D \cdots L \\ CD\ \cos. \quad D \cdots L \\ \vdots \\ LM \\ MN\ \cos. \cdots M \end{array}\right)^2 + \left(\begin{array}{l} -AB\ \sin. B+C+D \cdots L \\ -BC\ \sin. \quad C+D \cdots L \\ -CD\ \sin. \quad D \cdots L \\ \vdots \\ \text{»} \\ +MN\ \sin. \cdots M \end{array}\right)^2$$

$$= \left(\begin{array}{l} AB\ \cos. B+C+D \cdots M \\ BC\ \cos. \quad C+D \cdots M \\ CD\ \cos. \quad D \cdots M \\ \vdots \\ LM\ \cos. \cdots M \\ MN \end{array}\right)^2 + \left(\begin{array}{l} -AB\ \sin. B+C+D \cdots M \\ -BC\ \sin. \quad C+D \cdots M \\ -CD\ \sin. \quad D \cdots M \\ \vdots \\ -LM\ \sin. \cdots M \\ \text{»} \end{array}\right)^2$$

Nous verrons dans la ſuite des Applications importantes de ces différentes décompoſitions.

§. XXXII. *Corollaire.* Dans une Figure rectiligne quelconque ſoit menée une Diagonale. La Somme, de la Somme des Quarrés des Côtés ſitués d'une part de cette Diagonale & de la Somme de leurs doubles Rectangles par les Coſinus des Sommes des Angles extérieurs compris entr'eux; eſt égale à la Somme, de la Somme des Quarrés des Côtés ſitués de l'autre part de la même Diagonale & de la Somme de leurs doubles Rectangles par les Coſinus des Sommes des Angles extérieurs compris entr'eux. L'une & l'autre de ces deux Sommes peuvent être préſentées de toutes les manières énoncées dans le Paragraphe précédent.

Il ſuit encore de-là, qu'on peut calculer la Diagonale qui joint deux Sommets quelconques, puiſqu'elle eſt la Baſe d'une Figure rectiligne (à laquelle le Côté inconnu n'appartient pas) dont on connoît tous les autres Côtés & tous les Angles exceptés les deux qui lui ſont adjacens.

§. XXXIII. Le procédé trigonométrique auroit conſiſté dans la ſuite d'opérations ſuivantes.

Soient menées toutes les Diagonales AC, AD, AE - - - - AL, AM.

Dans le Triangle ABC, dont on connoît deux Côtés & l'Angle compris B; on peut calculer le Côté AC, & les Angles adjacens; de-là on connoîtra l'Angle ACD.

Dans le Triangle ACD, on connoît donc deux Côtés AC, CD, & l'Angle compris ACD; donc, on peut calculer le Côté AD & les Angles adjacens, & de-là on connoîtra l'Angle ADE.

En s'avançant ainſi de Triangles en Triangles on parviendra au Triangle AMN, dont on pourra calculer le Côté AN & l'Angle N.

On voit que la ſuite des doubles opérations qui compoſent ce procédé trigonométrique doit le rendre incertain, ſi le nombre des opérations ſucceſſives eſt un peu grand; & qu'il eſt bien difficile d'en tirer quelque propriété générale des Figures rectilignes; tandis que nous avons pu le faire d'une manière ſi élégante par le procédé polygonométrique ſimple. Sans pourſuivre le réſultat final du calcul trigonométrique, je reconnois que la recherche de ſon accord avec le calcul polygonométrique eſt un objet d'exercice, tout au moins curieux pour les jeunes Géomètres.

§. XXXIV. Au moyen des Propoſitions établies dans le §. XIV, ce premier cas de la Polygonométrie peut toujours ſe réduire au cas analogue de la Trigonométrie: Déterminer un Triangle dont on connoît deux Côtés & l'Angle compris.

En effet, que les Côtés AB, NM, ſe rencontrent en Z. Des Sommets A & N; ſoient abaiſſées ſur les Côtés NM & AB, les Perpendiculaires An, Na.

Par le §. XIV $An = AB\ \text{ſin.}\ B+C+D\cdots M$ $Na = BC\ \text{ſin.}\ B$
$BC\ \text{ſin.}\ C+D\cdots M$ $CD\ \text{ſin.}\ B+C$
$CD\ \text{ſin.}\ D\cdots M$ $DE\ \text{ſin.}\ B+C+D$
⋮ ⋮
$LM\ \text{ſin.}\ M$ $MN\ \text{ſin.}\ B+C+D\cdots M$.

Or, dans le Triangle AZn, rectangle en n; $An = AZ\ \text{ſin.}\ Z = AZ\ \text{ſin.}\ B+C+D\cdots M$
& dans le Triangle NZa, rectangle en a; $Na = NZ\ \text{ſin.}\ Z = NZ\ \text{ſin.}\ B+C+D\cdots M$

Donc, on connoît les Expreſſions des Droites AZ & NZ. Donc, dans le Triangle AZN, on connoît deux Côtés AZ, NZ, & l'Angle compris Z. Donc, ce Triangle eſt déterminé; & en particulier on peut calculer le Côté AN & les Angles à la Baſe A & N.

Je laiſſe encore aux jeunes Géomètres le ſoin de montrer l'accord de ce procédé mixte ou polygonométrico-trigonométrique, avec le procédé polygonométrique immédiat. Cette recherche n'aura pour eux aucune difficulté, pour peu qu'ils ſoient familiers avec les Formules de la Trigonométtie analytique. Je me contenterai de remarquer : Que, tandis que le procédé polygonométrique donne immédiatement les Expreſſions les plus ſimples du Côté & des Angles cherchés; le procédé mixte ne préſente pas immédiatement ces Expreſſions ſous leurs formes les plus ſimples; mais, pour y parvenir, il faut employer des réductions étrangères au but principal.

§. XXXV. On peut conſtruire immédiatement la Figure propoſée dans ſes Côtés & ſes Angles donnés en faiſant ſucceſſivement & alternativement ſes Côtés & ſes Angles des grandeurs données. Ce procédé, le plus ſimple dans la Théorie, eſt un des moins sûrs dans la Pratique; ſoit à cauſe de la grande influence des erreurs commiſes dans les tranſports des Angles; ſoit à cauſe de la dépendance de l'une quelconque de ces opérations de toutes celles qui la précèdent. La conſtruction par les Diagonales met à l'abri de ces deux ſources d'erreurs; mais elle a l'inconvénient de la longueur des calculs préliminaires qu'elle exige. Je me propoſe de développer une conſtruction ſimple & qui me paroît à l'abri de ces reproches, par laquelle on détermine en même tems le Côté & les Angles inconnus. Mais pour le faire d'une manière ſatisfaiſante, je crois devoir établir quelques Propoſitions préliminaires qu'on ne trouve pas dans les Cours ordinaires de Mathématiques pures, & qui trouveront dans la ſuite des applications remarquables.

§. XXXVI. *Lemme premier.* Deux Points & une Droite étant donnés de poſition ſur un Plan : De ces deux Points, & d'un Point quelconque pris ſur la Droite qui les joint, ſoient abaiſſées des Perpendiculaires ſur la Droite donnée de poſition : J'affirme que la Somme du Rectangle de la Perpendiculaire abaiſſée de l'un des Points donnés par la Diſtance de l'autre des Points donnés au Point pris à volonté; & du Rectangle

de la Perpendiculaire abaiſſée de l'autre des Points donnés, par la Diſtance du premier Point donné au Point pris à volonté, eſt égale au Rectangle de la Perpendiculaire abaiſſée du Point pris à volonté par la Diſtance des deux premiers Points.

Symboliquement. Soient A & B deux Points donnés, deſquels ſoient abaiſſées ſur une Droite donnée de poſition les Perpendiculaires AA', BB'; & d'un Point Z pris entre A & B, ſoit abaiſſée ſur la même Droite la Perpendiculaire ZZ'. J'affirme que $AA' \times BZ + BB' \times AZ = AB \times ZZ'$.

Fig. XIV. 1°.

Conſtr. Par Z ſoit menée à $A'B'$, une Parallèle qui rencontre en a & b les Perpendiculaires AA', BB'.

Demonſtr. Les Triangles AZa, BZb, ſont ſemblables; donc, $AZ : BZ = Aa : Bb$; & $AZ \times Bb = BZ \times Aa$.

Or, $AA' = ZZ' - Aa$; & $AA' \times BZ = ZZ' \times BZ - Aa \times BZ$

Item, $BB' = ZZ' + Bb$; & $BB' \times AZ = ZZ' \times AZ + Bb \times AZ$.

Donc, ajoutant - - - - - - - $AA' \times BZ + BB' \times AZ = ZZ'(AZ + BZ) = ZZ' \times AB$.

Remarque première. Si la Droite $A'B'$ rencontre AB entre A & B; par exemple, entre B & Z; on auroit de même $AA' \times BZ - BB' \times AZ = AB \times ZZ'$. La Perpendiculaire BB' ayant changé de direction, elle doit être précédée du ſigne oppoſé. En particulier, ſi la Droite $A'B'$ paſſe par le Point Z, en ſorte que la Perpendiculaire ZZ' évanouiſſe; on obtient $AA' \times BZ = BB' \times AZ$.

Fig. XIV. 2°. Si le Point Z eſt ſitué ſur la Droite AB prolongée : la Droite BZ ayant changé de Direction & partant de ſigne, on obtient $-BZ \times AA' + AZ \times BB' = AB \times ZZ'$.

Remarque ſeconde. Lorſque le Rapport de AZ à BZ eſt donné, le Point Z eſt déterminé, & ſa poſition ne dépend pas de la Ligne $A'B'$ ſur laquelle on abaiſſe les Perpendiculaires. Partant, deux Points étant donnés de poſition, & deux Droites étant données de grandeur, on peut toujours trouver en même tems la poſition d'un troiſième Point & la grandeur d'une troiſième Droite; de manière que, ſi ſur une Droite quelconque on abaiſſe des Perpendiculaires depuis le Point donné & depuis le Point trouvé, la ſomme (priſe dans le ſens général) des Perpendiculaires abaiſſées des Points donnés par les Droites données de grandeur, eſt égale à la Perpendiculaire abaiſſée du Point trouvé de poſition par la Droite trouvée de grandeur. Savoir, le Point Z ſe trouve en coupant la Droite AB en deux Parties BZ, AZ, qui ſoient entr'elles comme les deux Droites données de grandeur; & la troiſième Droite eſt la ſomme des deux Droites données.

§. XXXVII. *Lemme ſecond.* Un nombre quelconque de Points étant donnés de poſition ſur un Plan, on peut trouver ſur ce Plan, un Point, tel; que, ſi de tous les Points donnés & de ce dernier Point on abaiſſe des Perpendiculaires ſur

une

une Droite quelconque menée dans ce Plan ; la somme des Perpendiculaires abaissées de tous les Points donnés (supposées menées dans un même sens ; & en changeant les signes correspondans aux changemens de Direction), est égale à la Perpendiculaire abaissée du dernier Point prise autant de fois qu'il y a de Points donnés.

Symboliquement. Soient A, B, C, D, --- M, N, un nombre quelconque n de Points donnés de position. Soit LL' une Droite quelconque. De tous les Points A, B, C, D --- M, N. Soient abaissées sur LL' les Perpendiculaires AA', BB', CC', DD', --- MM', NN'. J'affirme ; qu'on peut trouver le Point Z, duquel abaissant ZZ' perpendiculaire à LL' ; la Somme des premières Perpendiculaires est égale à la dernière prise n fois.

En effet, par le Lemme premier, coupant AB en deux parties égales au Point P ; & abaissant PP' perpendiculaire à LL', on obtient $AA'+BB'=2PP'$.

Soit menée PC ; & soit coupée PC en Q, en deux parties, de manière que $CQ=2PQ$; & soit QQ' perpendiculaire à LL'. On obtient (Idem), $3QQ'=2PP'+CC'=AA'+BB'+CC'$. Soit menée DQ ; laquelle soit coupée en R, de manière que $DR=3QR$; & soit RR' perpendiculaire à LL'. On obtient (idem) ; $4RR'=3QQ'+DD'=AA'+BB'+CC'+DD'$.

En suivant ce procédé, on parvient enfin au Point Z, tel : . . . . Que, $nZZ'=AA'+BB'+CC'+\cdots NN'$. Savoir, on montre par un procédé conforme à celui du §. VIII ; que, si la Proposition est vraie pour un nombre quelconque de Points donnés, elle est vraie pour un nombre de Points plus grand d'une unité. Mais la Proposition est vraie pour des Nombres de Points, petits, tels que 2, 3, 4, --- Donc, elle est vraie pour un nombre quelconque de Points.

Remarque première. A la simple somme des Perpendiculaires abaissées des Points donnés, & au multiple de la Perpendiculaire abaissée du Point à trouver : j'aurois pu substituer la Somme des Rectangles des premières Perpendiculaires par des Droites données ; & le Rectangle de la dernière Perpendiculaire par la Somme des Droites données. Mais, pour le but que je me propose, je n'ai besoin que de la simple Somme de ces Perpendiculaires.

Remarque seconde. Le nombre de fois que la Perpendiculaire abaissée du Point Z doit être répétée pour égaler la Somme des Perpendiculaires abaissées de tous les Points donnés, est déterminé par la Position du Point Z, & par le nombre des Points donnés. On peut donc énoncer cette Proposition un peu autrement (sous la Forme de *Porisme* ; voyez sur ce genre de Propositions la Note jointe aux §§. *g* & *n*) ; comme il suit. Un nombre quelconque de Points étant donnés de position sur un Plan ; on peut trouver en même tems un Point & un Nombre, tels ; que, si de

M

tous les Points donnés & du Point trouvé on abaiſſe des Perpendiculaires ſur une Droite quelconque, la Somme des Perpendiculaires abaiſſées de tous les Points donnés, eſt égale à la Perpendiculaire abaiſſée du Point trouvé, répétée le nombre trouvé de fois.

Remarque troiſième. De ce qui précède, découle évidemment la manière de déterminer le point Z. Par un Point quelconque S, ſoient menées deux Droites SL, SL' (par exemple, perpendiculaires l'une à l'autre). De tous les Points donnés, ſoient abaiſſées des Perpendiculaires ſur les deux Droites menées. Soit priſe la Somme des Perpendiculaires abaiſſées ſur l'une de ces Droites, ſoit diviſée cette Somme par le nombre des Points, & ſoit menée à cette Droite une Parallèle éloignée d'elle d'une Droite égale au Quotient. Soit faite la même opération pour l'autre Droite. Le Point de ſection des deux Parallèles menées, ſera le Point Z cherché.

Par cette conſtruction : le Point Z eſt déterminé rélativement à deux Droites ſeulement, de manière qu'il jouit rélativement à elles de la Propriété propoſée : Il faut prouver ; que, dès-lors, il en jouit rélativement à toute autre Droite.

Les Perpendiculaires abaiſſées des Points . . . .

. . . A	ſur SL & SL' ſont reſpectivement	$SA \sin LSA$	& $SA \cos LSA$
B	. . . .	$SB \sin LSB$	$SB \cos LSB$
C	. . . .	$SC \sin LSC$	$SC \cos LSC$
D	. . . .	$SD \sin LSD$	$SD \cos LSD$
⋮		⋮	⋮
M	. . . .	$SM \sin LSM$	$SM \cos LSM$
N	. . . .	$SN \sin LSN$	$SN \cos LSN$

Et par ſuppoſition, n étant le nombre des Points, on a les deux Equations

$$\left.\begin{array}{l} SA \sin LSA \\ SB \sin LSB \\ SC \sin LSC \\ SD \sin LSD \\ \vdots \\ SM \sin LSM \\ SN \sin LSN \end{array}\right\} = nSZ \sin LSZ\,; \quad \& \quad \left.\begin{array}{l} SA \cos LSA \\ SB \cos LSB \\ SC \cos LSC \\ SD \cos LSD \\ \vdots \\ SM \cos LSM \\ SN \cos LSN \end{array}\right\} = nSZ \cos LSZ.$$

1°. Soit Sl une autre Droite menée par le Point S ; & que la Droite SL ſoit regardée comme étant ſituée entre tous les Points A, B, C - - - N & la Droite Sl.

Les Perpendiculaires à la Droite Sl, abaissées des Points . . . .

A font respectivement	SA *sin.* lSA	ou *sin.* $LSl \times SA$ *cos.* LSA +	*cos.* $LSl \times SA$ *sin.* LSA
B	SB *sin.* lSB	SB *cos.* LSB	SB *sin.* LSB
C	SC *sin.* lSC	SC *cos.* LSC	SC *sin.* LSC
D	SD *sin.* lSD	SD *cos.* LSD	SD *sin.* LSD
⋮	⋮	⋮	⋮
M	SM *sin.* lSM	SM *cos.* LSM	SM *sin.* LSM
N	SN *sin.* lSN	SN *cos.* LSN	SN *sin.* LSN

Donc, la Somme de toutes ces Perpendiculaires est . . . .

. . . . . . nSZ *sin.* LSl *cos.* LSZ + nSZ *cos.* LSl *sin.* LSZ

ou, nSZ(*sin.* LSl *cos.* LSZ + *cos.* LSl *sin.* LSZ)

ou, nSZ *sin.* $LSl + LSZ = nSZ$ *sin.* ZSl.

Donc, la somme de toutes ces Perpendiculaires vaut n fois la Perpendiculaire abaissée du Point Z sur la Droite Sl.

2°. Que la Droite L'' sur laquelle on abaisse les Perpendiculaires ne passe pas par le Point S. Par ce Point S soit menée à L'' une parallèle Sl. Les Sommes des Perpendiculaires abaissées des Points donnés sur les Droites L'' & Sl, different l'une de l'autre, de la Distance de ces deux Droites prise autant de fois qu'il y a de ces Perpendiculaires; c'est-à-dire, de n fois la Différence (prise de la même manière) des Perpendiculaires abaissées sur les mêmes Droites depuis le Point Z. Mais (premier cas) la Somme des Perpendiculaires abaissées des Points donnés sur la Droite Sl vaut n fois la Perpendiculaire abaissée du Point Z sur la même Droite. Donc aussi la Perpendiculaire abaissée des mêmes Points sur la Droite L'' vaut n fois la Perpendiculaire abaissée du Point Z sur cette Droite.

N. B. Le mot Somme est toujours pris dans le sens général, qui comprend celui de Différence, provenant du changement de signe répondant au changement de direction des Droites qu'on regarde comme additives quand elles sont menées dans un sens déterminé.

§. XXXVIII. *Définition.* Le Point Z joue un grand rôle dans la Méchanique, où il est appelé *Centre de Gravité* de Poids égaux placés aux Points A, B, C, D --- M, N. Pour abréger, & pour ne pas multiplier les Termes; qu'il me soit permis d'introduire dans les Mathématiques pures, ce mot qui tire son origine d'une science physico-mathématique. Mais il n'est point nécessaire d'avoir égard à cette origine étrangère; & pour répondre au but de cet Ouvrage, il suffit que ce Point soit tel: Que la Somme des Perpendiculaires abaissées de tous les Points dont il est le Centre de Gravité, sur une Droite quelconque, soit égale à la Perpendiculaire abaissée du même

Point sur la même Droite, prise autant de fois qu'il y a des premiers Points. Je me suis occupé dans un autre Ouvrage de quelques autres Propriétés remarquables de ce Point. Voyez *Relatio mutua Capacitatis & Terminorum Figurarum*, p. 60-71, 203-210.

§. XXXIX. De tout ce qui précède, on tire aisément la solution du Problême suivant, qui trouvera des applications dans la suite.

Problême. Un nombre quelconque de Points *A*, *B*, *C*, *D* ---- *M*, *N*, étant donnés de Position sur un Plan ; & un Point de plus *S*, étant aussi donné de Position ; mener par *S* une Droite, sur laquelle abaissant des Perpendiculaires depuis tous les Points donnés, la Somme de ces Perpendiculaires soit donnée de grandeur.

Soit cherché le Centre de Gravité *Z*, de tous les Points donnés, *A*, *B*, *C*, *D*-- *M*, *N*
1°. Que la Somme donnée doive être zéro : la Droite *SZ* est la Droite cherchée.
2°. Que la Somme donnée ne soit pas zéro. Soit divisée cette Somme par le nombre des premiers Points donnés ; soit *R* la partie aliquote de cette Somme répondante à cette Division. Du Point *Z* comme Centre, avec le Rayon *R* soit décrit un Cercle. Du Point *S* soient menées à ce Cercle la Tangente ou les Tangentes qu'on peut lui mener. Cette Tangente ou ces Tangentes, seront les Droites cherchées.

Si la Droite *R* est plus petite que *ZS*, le Problême a deux solutions ; ou il y a deux Droites auxquelles répond une même Somme des Perpendiculaires qui leur sont abaissées. Si la Droite *R* est égale à *ZS*, le Problême n'a qu'une solution, & la Droite cherchée est perpendiculaire à *SZ*. Cette Droite *R* a alors sa plus grande valeur ; & si la Droite *R* est plus grande que *SZ*, le Point *S* étant dans le Cercle dont *Z* est le Centre & *R* le Rayon, on ne peut mener du Point *S* aucune Tangente à ce Cercle ; donc, le Problême est impossible.

Il seroit facile d'appliquer le calcul à cette construction ; mais, craignant de pousser trop loin ces Propositions préliminaires, je passe à montrer leur application à la Question proposée.

§. XL. Connoissant dans une Figure rectiligne les Côtés excepté un, & les Angles exceptés les deux qui lui sont adjacens : déterminer ce Côté & ces Angles.

Par un Point quelconque *S* soit menée une Droite quelconque *SA* ; d'un même Côté de cette Droite, soient faits les Angles . . . .

. . . . *ASB* respectivement égaux aux Angles *B*

ASC	. . . .	*B*+*C*
ASD	. . . .	*B*+*C*+*D*
⋮		⋮
ASL	. . . .	*B*+*C*+*D* - - - - *L*
ASM	. . . .	*B*+*C*+*D* - - - - - *M*

Soient faites les Droites SA, SB, SC, SD -- SL, SM, reſpectivement égales aux Côtés donnés . . . . AB, BC, CD, DE -- LM, MN. Soit cherché le Centre commun de Gravité Z, des Points A, B, C, D -- L, M; ſoit menée SZ; les Angles ASZ, MSZ, ſeront reſpectivement égaux aux Angles extérieurs A & N de la Figure à conſtruire; & la Droite SZ priſe autant de fois qu'il y a de Points A, B, C - - - M, eſt égale au Côté cherché AN.

La démonſtration découle immédiatement des §§. XV & XXXVII.

En effet, par la conſtruction . . . .

. . . $SA \text{ ſin.} ZSA$ ou, $AB \text{ ſin.} ZSA$

$SB \text{ ſin.} ZSB$ $BC \text{ ſin.} ZSA+B$

$SC \text{ ſin.} ZSC$ $CD \text{ ſin.} ZSA+B+C$

⋮ ⋮

$SL \text{ ſin.} ZSL$ $LM \text{ ſin.} ZSA+B+C+ \cdots L$

$SM \text{ ſin.} ZSM = 0$; $MN \text{ ſin.} ZSA+B+C+ \cdots M = 0$.

Donc (§. XV) $ZSA = A$.

Item. Du Point S ſoit élevée à ZS une Perpendiculaire; & de tous les Points donnés ſoient abaiſſées ſur elle des Perpendiculaires: on obtient (§. XXXVII);

$$
\begin{aligned}
nZS = & \; AB \text{ coſ.} A \\
& \; BC \text{ coſ.} A+B \\
& \; CD \text{ coſ.} A+B+C \\
& \; \vdots \\
& \; LM \text{ coſ.} A+B+C \cdots L \\
& \; MN \text{ coſ.} A+B+C \cdots M = (\text{§. XIX}) \; AN.
\end{aligned}
$$

Peut-être le Lecteur trouvera-t-il que je me ſuis trop étendu ſur ce premier cas du premier Problême: mais comme il eſt fondamental, & que le plus grand nombre des cas ſuivans peuvent s'y réduire, j'ai cru devoir inſiſter davantage ſur ſon développement; ce qui me permettra de traiter plus briévement les autres cas. D'ailleurs, c'eſt un exercice tout au moins très-utile pour les jeunes Gens, de voir un même ſujet traité de pluſieurs manières.

Second cas du premier Problême.

Les deux Angles inconnus ſont adjacens l'un à l'autre, mais ne ſont pas adjacens au Côté inconnu.

§. XLI. Soient A, B, C, D - - - - M, N, A', B', C', D' - - - - M', N'; les Angles extérieurs ſucceſſifs d'une Figure rectiligne; ſoient N & A', les Angles adjacens inconnus, & AN' le Côté inconnu. On demande ce Côté & ces Angles.

N

Par le §. XVII

$$
\begin{array}{ll}
AB\ \text{ſin.}\ A & = A'B'\ \text{ſin.}\ B'+C'+D'+\cdots M'+N' \\
BC\ \text{ſin.}\ A+B & \ B'C'\ \text{ſin.}\ C'+D'+\cdots M'+N' \\
CD\ \text{ſin.}\ A+B+C & \ C'D'\ \text{ſin.}\ D'+\cdots M'+N' \\
\vdots & \ \vdots \\
LM\ \text{ſin.}\ A+B+C+\cdots L & \ L'M'\ \text{ſin.}\ M'+N' \\
MN\ \text{ſin.}\ A+B+C+\cdots L+M & \ M'N'\ \text{ſin.}\ N' \\
NA'\ \text{ſin.}\ A+B+C+\cdots L+M+N &
\end{array}
$$

Dans cette Equation, tous les Termes qui y entrent ſont connus, excepté le Terme NA' ſin. $A+B+C+\cdots+L+M+N$. Donc, ce Terme eſt auſſi connu; mais le Facteur NA' eſt connu; donc le Facteur ſin. $A+B+C\cdots+L+M+N$ eſt connu; donc auſſi l'Angle $A+B+C\cdots L+M+N$ eſt connu. Mais l'Angle $A+B+C\cdots L+M$ eſt connu; donc l'Angle N eſt auſſi connu. De la même manière, l'Angle A' eſt connu.

§. XLII. Connoiſſant les Angles N & A', on connoîtra les Sinus & Coſinus des Sommes dans leſquelles ils entrent avec les autres Angles connus; & partant par le §. XIX on peut connoître le Côté AN'.

Mais on peut auſſi calculer immédiatement le Côté AN' d'après le §. XXXI, qui fournit l'Equation ſuivante, dans laquelle le Côté AN' eſt ſeul inconnu.

$$
A'N'^2 = \left(
\begin{array}{l}
NM\ \text{coſ.}\ M+L+\cdots\cdots C+B+A \\
ML\ \text{coſ.}\ L+\cdots\cdots C+B+A \\
\vdots \\
DC\ \text{coſ.}\cdots\cdots C+B+A \\
CB\ \text{coſ.}\cdots\cdots B+A \\
BA\ \text{coſ.}\cdots\cdots A \\
AN' \\
N'M'\ \text{coſ.}\ N' \\
M'L'\ \text{coſ.}\ M'+N' \\
\vdots \\
D'C'\ \text{coſ.}\ D'+\cdots M'+N' \\
C'B'\ \text{coſ.}\ C'+D'+\cdots M'+N' \\
B'A'\ \text{coſ.}\ B'+C'+D'+\cdots M'+N'
\end{array}
\right)^2
+ \left(
\begin{array}{l}
-NM\ \text{ſin.}\ M+L+\cdots\cdots C+B+A \\
-ML\ \text{ſin.}\ L+\cdots\cdots C+B+A \\
\vdots \\
-DC\ \text{ſin.}\cdots\cdots C+B+A \\
-CB\ \text{ſin.}\cdots\cdots B+A \\
-BA\ \text{ſin.}\cdots\cdots A \\
+N'M'\ \text{ſin.}\cdots\cdots N' \\
M'L'\ \text{ſin.}\cdots\cdots M'+N' \\
\vdots \\
D'C'\ \text{ſin.}\ D'+\cdots M'+N' \\
C'B'\ \text{ſin.}\ C'+D'+\cdots M'+N' \\
B'A'\ \text{ſin.}\ B'+C'+D'+\cdots M'+N'
\end{array}
\right)^2.
$$

§. XLIII. Limite.

$$
NA' \begin{array}{c} = \\ > \end{array}
\begin{array}{l}
-NM\ \text{ſin.}\ M+L\cdots\cdots C+B+A \\
-ML\ \text{ſin.}\ L\cdots\cdots C+B+A \\
\vdots \\
-DC\ \text{ſin.}\cdots\cdots C+B+A \\
-CB\ \text{ſin.}\cdots\cdots B+A \\
-BA\ \text{ſin.}\cdots\cdots A \\
+N'M'\ \text{ſin.}\cdots\cdots N' \\
M'L'\ \text{ſin.}\cdots\cdots M'+N' \\
\vdots \\
D'C'\ \text{ſin.}\ D'+\cdots M'+N' \\
C'B'\ \text{ſin.}\ C'+D'+\cdots M'+N' \\
B'A'\ \text{ſin.}\ B'+C'+D'+\cdots M'+N'.
\end{array}
$$

On auroit pu déduire la même Limite du §. XLI.

§. XLIV. *Remarque première.* L'origine de la double valeur de AN' eſt dans la double valeur de l'Angle $A+B+C+ \cdots L+M+N$; dont le Sinus eſt donné ; vu que deux Angles ſupplémens l'un de l'autre à deux Angles droits ont le même Sinus.

Remarque ſeconde. Ce ſecond cas peut toujours ſe réduire au premier cas, & à un cas analogue de Tétragonométrie. En effet, ſoient menées les Diagonales AN, $A'N'$. Dans la Figure $ABCD \cdots MN$, on connoît tous les Côtés excepté AN, & tous les Angles exceptés les deux adjacens à cette Diagonale ; donc, cette Diagonale & ces Angles peuvent être calculés (premier cas). De la même manière, dans la Figure $A'B'C'D' \cdots M'N'$, on peut calculer la Diagonale $A'N'$ & les Angles adjacens. De-là, dans le Quadrilatère $ANA'N'$, on connoîtra les Angles en A & N' ; & les Côtés excepté le Côté AN'. Donc, on pourra calculer ce Côté & les Angles reſtans en N & A'. Soit donc $ABCD$ un Quadrilatère dont on connoît tous les Côtés excepté AD, & les Angles exceptés ceux en B & C ; on a l'Equation

$$\begin{array}{l} AB\,\text{ſin.}\,A \\ BC\,\text{ſin.}\,A+B = CD\,\text{ſin.}\,D. \end{array}$$

Donc, l'Angle B eſt connu.

$$\text{Item},\ BC^2 = \begin{array}{lcl} (CD\,\text{coſ.}\,D & & (-CD\,\text{ſin.}\,D \\ DA & + & \text{»} \\ AB\,\text{coſ.}\,A)^2 & & +AB\,\text{ſin.}\,A)^2. \end{array}$$

Donc, le Côté AD eſt connu.

N. B. Je ne crois pas que ce ſecond cas puiſſe être réduit à la Trigonométrie ſimple.

Remarque troiſième. Il ſeroit aiſé de conſtruire l'Equation du §. XLI ; & partant, de déterminer l'Angle N, d'après les propriétés du Centre de Gravité, & d'après le §. XXXIX. Mais les détails dans leſquels je ſuis entré en développant le premier cas, m'exemptent d'entrer dans de pareils détails pour le développement du ſecond.

Troiſième Cas du premier Problême.

Les deux Angles inconnus ne ſont ni adjacens l'un à l'autre, ni adjacens au Côté inconnu.

§. XLV. Soient $A, B, C, D, \cdots M, N, A', B', C', D', \cdots M', N', A'', B'', C'', D'' \cdots M'', N''$; les Sommets d'une Figure rectiligne, que le Côté inconnu ſoit $N''A$; que les Angles inconnus ſoient N & N'.

Je penſe ; que le procédé le plus ſimple pour la pratique, eſt de réduire ce Cas au premier & au ſecond déjà développés. Pour cela, ſoit menée la Diagonale NN'. Dans la Figure $NA'B'C'D' \cdots M'N'$, on connoît tous les Côtés excepté NN', & tous les Angles exceptés les deux adjacens à cette Diagonale : donc (premier Cas), on peut calculer cette Diagonale & ces Angles. De-là, dans la Figure $ABCD \cdots NN'A''B''C'' \cdots N''$,

on connoît tous les Côtés excepté AN'', & tous les Angles exceptés les deux adjacens en N & N' : Donc, par le second cas, on peut calculer ce Côté & ces Angles. Donc, on connoît les Angles N & N' de la Figure proposée, & son Côté AN''.

N. B. Ce Cas étant composé des deux premiers, & le second ne me paroissant pas réductible à la Trigonométrie simple, il me paroit à plus forte raison que ce troisième Cas ne peut pas s'y réduire.

§. XLVI. On peut aussi calculer immédiatement le Côté inconnu AN'' d'après le §. XXXI.

En effet, en égalant les deux valeurs du Quarré de la Diagonale NN', on obtient l'Equation

$$
\begin{array}{l}
(NA' \\
A'B' \ \text{cos.}\, A' \\
B'C' \ \text{cos.}\, A'+B' \\
C'D' \ \text{cos.}\, A'+B'+C' \\
\vdots \\
M'N' \ \text{cos.}\, A'+B'+C'+ \ldots\ldots\ldots M')^2
\end{array}
+
\begin{array}{l}
(A'B' \ \text{sin.}\, A' \\
B'C' \ \text{sin.}\, A'+B' \\
C'D' \ \text{sin.}\, A'+B'+C' \\
\vdots \\
M'N' \ \text{sin.}\, A'+B'+C'+ \ldots\ldots\ldots M')^2
\end{array}
$$

$$
=\begin{array}{l}
(NM \ \text{cos.}\, M+L \ldots\ldots\ldots C+B+A \\
ML \ \text{cos.}\, L+ \ldots\ldots\ldots C+B+A \\
\vdots \\
DC \ \text{cos.}\, C+B+A \\
CB \ \text{cos.}\, B+A \\
BA \ \text{cos.}\, A \\
AN'' \\
N''M'' \text{cos.}\, N'' \\
M''L'' \text{cos.}\, N''+M'' \\
\vdots \\
D''C'' \text{cos.}\, N''+M''+\ldots D'' \\
C''B'' \text{cos.}\, N''+M''+\ldots D''+C'' \\
B''A'' \text{cos.}\, N''+M''+\ldots D''+C''+B'' \\
A''N'' \text{cos.}\, N''+M''+\ldots D''+C''+B''+A'')^2
\end{array}
+
\begin{array}{l}
(-NM \ \text{sin.}\, M+L \ldots\ldots\ldots C+B+A \\
-ML \ \text{sin.}\, L+ \ldots\ldots\ldots C+B+A \\
\vdots \\
-DC \ \text{sin.} \ldots\ldots\ldots C+B+A \\
-CB \ \text{sin.} \ldots\ldots\ldots B+A \\
-BA \ \text{sin.} \ldots\ldots\ldots A \\
+N''M'' \text{sin.}\, N'' \\
+M''L'' \text{sin.}\, N''+M'' \\
\vdots \\
D''C'' \text{sin.}\, N''+M''+\ldots D'' \\
C''B'' \text{sin.}\, N''+M''+\ldots D''+C'' \\
B''A'' \text{sin.}\, N''+M''+\ldots D''+C''+B'' \\
A''N'' \text{sin.}\, N''+M''+\ldots D''+C''+B''+A'')^2
\end{array}
$$

Dans cette équation, on ignore seulement le Terme AN''; & partant, on pourra l'obtenir par une soustraction & une extraction de racine quarrée.

On voit que ce Cas est encore susceptible de limites, & que la Somme des deux Termes qui composent le premier Membre ne doit pas être plus petite que le second Terme du second Membre.

§. XLVII. Le calcul immédiat des Angles inconnus N & N', me paroît exiger nécessairement une Equation du second Degré.

En

En effet ; on a l'Equation

$$
\begin{array}{l}
AB\ \text{ſin.}\ A \\
BC\ \text{ſin.}\ A+B \\
CD\ \text{ſin.}\ A+B+C \\
\vdots \\
LM\ \text{ſin.}\ A+B+C\ \ldots\ L \\
MN\ \text{ſin.}\ A+B+C\ \ldots\ L+M
\end{array}
+
\begin{array}{l}
NA'\ \text{ſin.}\ A+B+C\ \ldots\ L+M+N \\
A'B'\ \text{ſin.}\ A+B+C\ \ldots\ L+M+N+A' \\
B'C'\ \text{ſin.}\ A+B+C\ \ldots\ L+M+N+A'+B' \\
\vdots \\
L'M\ \text{ſin.}\ A+B+C\ \ldots\ L+M+N+A'+B'\ \ldots\ L' \\
M'N'\ \text{ſin.}\ A+B+C\ \ldots\ L+M+N+A'+B'+\ \ldots\ L'+M'
\end{array}
$$

$$
=
\begin{array}{l}
N'A''\ \text{ſin.}\ A''+B''+C''\ \ldots\ M''+N'' \\
A''B''\ \text{ſin.}\ \qquad B''+C''\ \ldots\ M''+N'' \\
B''C''\ \text{ſin.}\ \qquad\quad C''\ \ldots\ M''+N'' \\
\vdots \\
L''M''\ \text{ſin.}\ \ldots\ldots\ldots\ M''+N'' \\
M''N''\ \text{ſin.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ N''.
\end{array}
$$

Préſentant les Termes qui contiennent l'Angle inconnu N ; ſous la forme du Sinus & du Coſinus de cet Angle, on obtient une Equation de la forme $a\,\text{ſin.}x+b\,\text{coſ.}x=c$, à laquelle répondent les valeurs ſuivantes du Sinus & du Coſinus de x ; $\text{ſin.}\,x=\frac{ac\pm b\sqrt{(aa+bb-cc)}}{aa+bb}$; $\text{coſ.}\,x=\frac{bc\mp a\sqrt{(aa+bb-cc)}}{aa+bb}$.

En ſubſtituant aux Quantités a, b, c, leurs valeurs ; on tire de ces Formules les mêmes Limites qu'on a obtenues de l'Equation du Paragraphe précédent.

Il ſeroit aiſé de conſtruire cette Equation par les propriétés du Centre de Gravité, & de montrer que ce Cas ſe réduit au ſecond Cas du Problême développé dans le §. XXXIX.

Second Problême.

On connoît dans une Figure rectiligne tous les Angles, & tous les Côtés exceptés deux.

On pourroit ſubdiviſer ce Problême, ſuivant que les Côtés inconnus ſont adjacens l'un à l'autre, ou que le nombre des Côtés compris entre les Côtés inconnus eſt plus ou moins grand. Mais, comme le procédé peut être rendu général, je regarde cette ſubdiviſion comme ſuperflue.

§. XLVIII. Soit $ABCD\ ---\ MNA'B'C'D'\ ---\ M'N'$; une Figure rectiligne dont on connoît tous les Angles, & tous les Côtés exceptés les deux AN', NA'. On demande ces Côtés.

Regardant un des Côtés inconnus, tel que AN', comme la baſe de la Figure, on a l'Equation

$$
\begin{array}{l}
AB\ \text{ſin.}\ A \\
BC\ \text{ſin.}\ A+B \\
CD\ \text{ſin.}\ A+B+C \\
\vdots \\
LM\ \text{ſin.}\ A+B+C\ \ldots\ L \\
MN\ \text{ſin.}\ A+B+C\ \ldots\ M \\
NA\ \text{ſin.}\ A+B+C\ \ldots\ N
\end{array}
=
\begin{array}{l}
A'B'\ \text{ſin.}\ B'+C'+D'\ \ldots\ L'+M'+N' \\
B'C'\ \text{ſin.}\ \qquad C'+D'\ \ldots\ L'+M'+N' \\
C'D'\ \text{ſin.}\ \qquad\quad D'\ \ldots\ L'+M'+N' \\
\vdots \\
L'M'\ \text{ſin.}\ \ldots\ldots\ldots\ M'+N' \\
M'N'\ \text{ſin.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ N'
\end{array}
$$

Dans cette Equation, tous les Termes font connus, excepté NA'; donc ce Côté eft connu. On calculera de même l'autre Côté AN'.

§. XLIX. *Remarque.* Ce Problême peut toujours fe réduire au premier Cas du premier Problême, & à un Cas analogue de Tétragonométrie.

En effet, foient menées les deux Diagonales AN, $A'N'$.

Dans la Figure $ABCD$ - - - - MN, on connoît tous les Côtés excepté AN, & tous les Angles exceptés les deux qui lui font adjacens : Donc, on peut calculer ce Côté & ces Angles ; & de-là on peut calculer les Angles NAN', ANA'. De même, dans la Figure $A'B'C'D'$ - - - $M'N'$, on peut calculer $A'N'$, & les Angles $AN'A'$, $NA'N'$. Donc, dans le Quadrilatère $ANA'N'$, on connoît tous les Angles, & les Côtés exceptés les deux Côtés oppofés AN', $A'N$.

Troifième Problême.

On connoît dans une Figure rectiligne tous les Côtés, & tous les Angles exceptés trois.

On pourroit auffi divifer ce Problême fuivant que les Angles inconnus font adjacens les uns aux autres, ou qu'ils ne le font pas ; & on pourroit fubdivifer ce dernier Cas fuivant le nombre des Côtés compris entre les Angles inconnus. Mais le procédé étant fenfiblement le même pour tous les Cas, je ne crois pas devoir entrer dans ces diftinctions.

§. L. Pour la pratique, je crois que le procédé le plus fimple, eft de réduire ce troifième Problême au premier Cas du premier, & au Cas analogue de Trigonométrie.

Soit $ABCD$ - - - $MNA'B'C'D'$ - - - $M'N'A''B''C''C''D''$ - - - $M''N''$; une Figure rectiligne, dont on connoît tous les Côtés, & tous les Angles exceptés A, A', A''.

Soient menées les Diagonales AA', $A'A''$, $A''A$.

Dans la Figure $ABCD$ - - - MNA', on connoît tous les Côtés excepté AA', & tous les Angles exceptés les deux adjacens à ce Côté ; donc (premier Cas du premier Problême) cette Figure eft déterminée ; & en particulier, on peut calculer le Côté AA' & les Angles qui lui font adjacens.

De la même manière : Dans la Figure $A'B'C'D'$ - - - - $M'N'A''$, on connoît tous les Côtés excepté $A'A''$, & tous les Angles exceptés les deux adjacens à ce Côté : Donc, on peut calculer ce Côté & ces Angles. De même, dans la Figure $A''B''C''D''$ - - - - $M''N''A$ on peut calculer AA'' & les Angles adjacens.

De-là, dans le Triangle $AA'A''$, on connoît tous les Côtés : Donc, on peut calculer les Angles de ce Triangle. Donc, on connoît les trois Parties dont font compofés chacun des Angles A, A', A''; donc, ces Angles font connus.

§. LI. J'ai essayé différens procédés pour connoître immédiatement les Angles inconnus sans les calculer par leurs Parties. Mais ils m'ont paru être tous beaucoup plus compliqués que le Procédé médiat que je viens de développer. Cependant, des Procédés immédiats qu'on peut être tenté de suivre, ceux qui sont déduits des différentes Equations du §. XXXI me paroissent devoir être les plus simples.

Exemple. Soit menée la Diagonale AA'', on a l'Equation

$$\left(\begin{array}{ll} AB & \\ BC & \text{cof.}\,B \\ CD & \text{cof.}\,B+C \\ \vdots & \\ MN & \text{cof.}\,B+C \ldots M \\ NA' & \text{cof.}\,B+C \ldots M+N \\ A'B' & \text{cof.}\,B+C \ldots M+N+A' \\ B'C' & \text{cof.}\,B+C \ldots M+N+A'+B' \\ \vdots & \\ M'N' & \text{cof.}\,B+C \ldots M+N+A'+B' \ldots M' \\ N'A'' & \text{cof.}\,B+C \ldots M+N+A'+B' \ldots M'+N' \end{array}\right)^2 + \left(\begin{array}{ll} BC & \text{fin.}\,B \\ CD & \text{fin.}\,B+C \\ \vdots & \\ MN & \text{fin.}\,B+C \ldots M \\ NA' & \text{fin.}\,B+C \ldots M+N \\ A'B' & \text{fin.}\,B+C \ldots M+N+A' \\ B'C' & \text{fin.}\,B+C \ldots M+N+A'+B' \\ \vdots & \\ M'N' & \text{fin.}\,B+C \ldots M+N+A'+B' \ldots M' \\ N'A'' & \text{fin.}\,B+C \ldots M+N+A'+B' \ldots M'+N' \end{array}\right)^2$$

$$= \left(\begin{array}{ll} A''B'' & \\ B''C'' & \text{cof.}\,B'' \\ C''D'' & \text{cof.}\,B''+C'' \\ \vdots & \\ M''N'' & \text{cof.}\,B''+C'' \ldots M'' \\ N''A & \text{cof.}\,B''+C'' \ldots M''+N'' \end{array}\right)^2 + \left(\begin{array}{ll} B''C'' & \text{fin.}\,B'' \\ C''D'' & \text{fin.}\,B''+C'' \\ \vdots & \\ M''N'' & \text{fin.}\,B''+C'' \ldots M'' \\ N''A & \text{fin.}\,B''+C'' \ldots M''+N'' \end{array}\right)^2$$

Dans cette Equation, l'Angle A' est seul inconnu. Développant le premier Membre, & présentant ceux des Termes de ce Développement qui contiennent l'Angle A' dans le Sinus & le Cosinus de cet Angle, on obtient une Equation de la forme $a\,\text{fin.}\,x + b\,\text{cof.}\,x = c$; au moyen de laquelle on calcule l'Angle x.

Cette Equation devient du premier degré, & de la forme $b\,\text{cof.}\,x = c$; dans le cas où les Angles inconnus sont adjacens les uns aux autres, & qu'on cherche l'Angle intermédiaire. Par le premier procédé, on obtient aussi cet Angle immédiatement, & les deux autres sont décomposés seulement en deux Parties.

Remarque. Ce qui complique la solution immédiate de ce Cas, est sans doute le nombre des solutions dont il est susceptible. En effet, si on suppose qu'on n'a aucune connoissance tirée de l'intuition de la Figure sur les dispositions des parties retranchées par les Diagonales AA', $A'A''$, $A''A$: chacune des parties retranchées par une de ces Diagonales pouvant être située de part & d'autre de cette Diagonale, on voit que les Angles inconnus ayant leurs sommets aux Extrêmités de ces Diagonales, peuvent revêtir chacun quatre valeurs différentes; de manière que la Figure elle-même

est susceptible de huit formes différentes. Mais, le plus souvent, une seule de ces huit formes répond aux connoissances qu'on a d'ailleurs sur la Figure ; & si la Figure est supposée n'avoir aucune partie rentrante, celle dans laquelle les trois parties retranchées par les Diagonales sont extérieures rélativement au Triangle formé par ces Diagonales, est la Figure qu'on cherche.

Il n'arrive que trop souvent en Mathématiques, que le calcul donnant plus qu'on ne lui demande, on obtient d'autant plus difficilement le but principal & unique qu'on se propose, qu'il y a un plus grand nombre de Quantités liées avec le principal objet de la question, qui se glissent avec lui dans la route qu'on se croit obligé de suivre pour déterminer ce dernier : Et ce n'est souvent que par des artifices, difficiles à imaginer, qu'on parvient à démêler & expulser ces objets étrangers. Il me seroit aisé d'en donner des exemples, si je ne craignois de prolonger cette Digression.



CHAPITRE

CHAPITRE TROISIEME.

Exemples numériques.

POUR servir de modèles d'applications des Formules contenues dans le Chapitre précédent, je vais calculer en faveur des jeunes Géomètres des exemples de chacun des Problêmes qui y sont résolus.

Premier Exemple rélatif au premier Cas du premier Problême.

Soit *ABCDEF* un Hexagone dont on connoît tous les Côtés excepté *AF*, & tous les Angles exceptés *A* & F. On demande ces Angles & ce Côté.

Côtés.	Angles extérieurs.	De-là
$AB = 1284$	$B = 32°$	$B+C = 80°$
$BC = 1782$	$C = 48°$	$B+C+D = 132°$
$CD = 2400$	$D = 52°$	$B+C+D+E = 198°$
$DE = 2700$	$E = 66°$	$A+F = 162°$.
$EF = 2860$		

$$Tang.\ BAF\ (\S.XXVII.) = \frac{BC\ sin.\ 32° + CD\ sin.\ 80° + DE\ sin.\ 132° + EF\ sin.\ 198°}{AB + BC\ cos.\ 32° + CD\ cos.\ 80° + DE\ cos.\ 132° + EF\ cos.\ 196°}$$

$$= \frac{BC\ sin.\ 32° + CD\ sin.\ 80° + DE\ sin.\ 48° - EF\ sin.\ 18°}{AB + BC\ cos.\ 32° + CD\ cos.\ 80° - DE\ cos.\ 48° - EF\ cos.\ 18°}$$

Log. BC	= 3.2509077	*Log. BC*	= 3.2509077
Log. sin. 32°	= 9.7242097	*Log. cos.* 32°	= 9.9284205
Log. Pr.	= 2.9751174	*Log. Pr.*	= 3.1793282
Pr.	= 944,316	*Pr.*	= 1511,222
Log. CD	= 3.3802112	*Log. CD*	= 3.3802112
Log. sin. 80°	= 9.9933515	*Log. cos.* 80°	= 9.2396702
Log. Pr.	= 3.3735627	*Log. Pr.*	= 2.6198814
Pr.	= 2363,54	*Pr.*	= 416,755

P

$$\begin{array}{ll} Log.\ DE = 3.4313638 & Log.\ DE = 3.4313638 \\ Log.\ sin.\ 48^\circ = 9.8710735 & Log.\ cos.\ 48^\circ = 9.8255109 \\ \hline Log.\ Pr. = 3.3024373 & Log.\ Pr. = 3.2568747 \\ Pr. = 2006{,}491 & Pr. = 1806{,}653 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Log.\ EF = 3.4563660 & Log.\ EF = 3.4563660 \\ Log.\ sin.\ 18^\circ = 9.4899824 & Log.\ cos.\ 18^\circ = 9.9782063 \\ \hline Log.\ Pr. = 2.9463484 & Log.\ Pr. = 3.4345723 \\ Pr. = 883{,}788 & Pr. = 2720{,}022 \end{array}$$

$$Tang.\ 180^\circ - A = \frac{944{,}316 + 2363{,}54 + 2006{,}491 - 883{,}788}{1284 + 1511{,}222 + 416{,}755 - 1806{,}653 - 2720{,}022}$$

$$= \frac{4\ 430{,}\ 559}{-1\ 314{,}\ 698}.\quad Tang.\ A = \frac{4\ 430\ 559}{1\ 314\ 698}.$$

$$\begin{array}{ll} Log.\ 4\ 430\ 559 = 6.\ 6464582 & AF^2 = 4\ 430{,}\ 559^2 \\ Log.\ 1\ 314\ 698 = 6.\ 1188259 & \quad + 1\ 314{,}\ 698^2 \\ \hline Log.\ Tang.\ A = 10{,}5276323 & AF = 4621{,}\ 5 \\ A = 73^\circ\ 28'\ 21{,}2'' & \\ F = 88^\circ\ 31'\ 37{,}8'' & \end{array}$$

Pour vérifier cette valeur de AF, je vais chercher si elle s'accorde avec l'Equation du §. XIX.

$$\begin{array}{ll} 180^\circ - A & = 106^\circ\ 31'\ 37{,}8'' \\ 180^\circ - (A+B & = 74^\circ\ 31'\ 37{,}8'' \\ 180^\circ - (A+B+C & = 26^\circ\ 31'\ 37{,}8'' \\ 180^\circ - (E+F & = 25^\circ\ 28'\ 22{,}2'' \\ 180^\circ - .\quad F & = 91^\circ\ 28'\ 22{,}2'' \end{array}$$

Donc, on doit avoir ; $AF = -AB\ cos.\ 73^\circ\ 28'\ 22{,}2''$

$$\begin{array}{l} +BC\ cos.\ 74^\circ\ 31'\ 37{,}8'' \\ +CD\ cos.\ 26^\circ\ 31'\ 37{,}8'' \\ +DE\ cos.\ 25^\circ\ 28'\ 22{,}2'' \\ -EF\ cos.\ 88^\circ\ 31'\ 37{,}8'' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Log.\ AB = 3.1085650 & Log.\ BC = 3.2509077 \\ Log.\ cos.\ 73^\circ\ 28'\ 22{,}2'' = 9.4540366 & Log.\ cos.\ 74^\circ\ 31'\ 37{,}8'' = 9.4261557 \\ \hline Log.\ Pr. = 2.5626016 & Log.\ Pr. = 2.6770634 \\ Pr. = 365{,}26 & Pr. = 475{,}405 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} Log.\ CD = 3.3802112 & Log.\ DE = 3.4313638 \\ Log.\ cos.\ 26^\circ\ 31'\ 37{,}8'' = 9.9516884 & Log.\ cos.\ 25^\circ\ 28'\ 22{,}2'' = 9.9555963 \\ \hline Log.\ Pr. = 3.3318996 & Log.\ Pr. = 3.3869601 \\ Pr. = 2147{,}334 & Pr. = 2437{,}587 \end{array}$$

Log. EF	= 3.4563660	AF =	475,405
Log. cos. 88° 31' 37,8''	= 8.4099833		2147,334 — 365,26
			2437,587 73,5105
Log. Pr.	= 1.8663493		= 5060,326 — 438,7705
Pr.	= 73,5105		= 4621,555

Cette valeur de *AF* s'accorde jusqu'au cinquième caractère avec la première valeur ; ce qui est une exactitude bien suffisante.

Calcul de la *Surface* du même Hexagone, d'après la Formule du §. VIII.

$2S = AB \times BC\,\text{sin.}\ 32°$
$\quad CD\,\text{sin.}\ 80° + BC \times CD\,\text{sin.}\ 48°$
$\quad DE\,\text{sin.}\,132° \quad DE\,\text{sin.}\,100° + CD \times DE\,\text{sin.}\ 52°$
$\quad EF\,\text{sin.}\,198° \quad EF\,\text{sin.}\,166° \quad EF\,\text{sin.}\,118° + DE \times EF\,\text{sin.}\,66°.$

Log. AB	= 3.1085650	Log. AB	= 3.1085650
Log. BC	= 3.2509077	Log. CD	= 3.3802112
Log. sin. 32°	= 9.7242097	Log. sin. 80°	= 9.9933515
Log. Pr.	= 6.0836824	Log. Pr.	= 6.4821277
Pr.	= 1 212 502	Pr.	= 3 034 783
Log. AB	= 3.1085650	Log. AB	= 3.1085650
Log. DE	= 3.4313638	Log. EF	= 3.4563660
Log. sin. 48°	= 9.8710735	Log. sin. 18°	= 9.4899824
Log. Pr.	= 6.4110023	Log. Pr.	= 6.0549134
Pr.	= 2 576 335	Pr.	= 1 134 545
Log. BC	= 3.2509077	Log. BC	= 3.2509077
Log. CD	= 3.3802112	Log. DE	= 3.4313638
Log. sin. 48°	= 9.8710735	Log. sin. 80°	= 9.9933515
Log. Pr.	= 6.5021924	Log. Pr.	= 6.6756230
Pr.	= 3 178 782	Pr.	= 4 738 306
Log. BC	= 3.2509077	Log. CD	= 3.3802112
Log. EF	= 3.4563660	Log. DE	= 3.4313638
Log. sin. 14°	= 9.3836752	Log. sin. 52°	= 9.8965321
Log. Pr.	= 6.0909489	Log. Pr.	= 6.7081071
Pr.	= 1 232 960	Pr.	= 5 106 309
Log. CD	= 3.3802112	Log. DE	= 3.4313638
Log. EF	= 3.4563660	Log. EF	= 3.4563660
Log. sin. 62°	= 9.9459349	Log. sin. 66°	= 9.9607302
Log. Pr.	= 6.7825121	Log. Pr.	= 6.8484600
Pr.	= 6 060 550	Pr.	= 7 054 400

Ajoutant tous ces produits, excepté le quatrième qui doit être retranché, on obtient

$$2S = 33\,060\,382$$
$$S = 16\,530\,191$$

Second Exemple; rélatif, comme le premier, au premier Cas du premier Problême; mais à une Figure ayant un Angle rentrant.

Soit *ABCDE* un Pentagone ayant un Angle rentrant en *C*.

Côtés.	Angles extérieurs.	
$AB = 2000$	$B = 124^\circ$	$B - C = 72^\circ$
$BC = 2560$	$C = 52^\circ$	$B - C + D = 216^\circ.$
$CD = 3200$	$D = 144^\circ.$	
$DE = 3600$		

$$\text{Tang. } BAE = \frac{BC \text{ sin. } 124^\circ + CD \text{ sin. } 72^\circ + DE \text{ sin. } 216^\circ}{AB + BC \text{ cos. } 124^\circ + CD \text{ cos. } 72^\circ + DE \text{ cos. } 216^\circ}$$

$$= \frac{BC \text{ sin. } 56^\circ + CD \text{ sin. } 72^\circ - DE \text{ sin. } 36^\circ}{AB - BC \text{ cos. } 56^\circ + CD \text{ cos. } 72^\circ - DE \text{ cos. } 36^\circ}$$

Log. *BC*	= 3.4082400	Log. *CD*	= 3.5051500
Log. sin. 56°	= 9.9185742	Log. sin. 72°	= 9.9782063
Log. Pr.	= 3.3268142	Log. Pr.	= 3.4833563
Pr.	= 2122,336	Pr.	= 3043,381
Log. *DE*	= 3.5563015	Log. *BC*	= 3.4082400
Log. sin. 36°	= 9.7692187	Log. cos. 56°	= 9.7475617
Log. Pr.	= 3.3255212	Log. Pr.	= 3.1558017
Pr.	= 2116,027	Pr.	= 1431,534
Log. *CD*	= 3.5051500	Log. *DE*	= 3.5563025
Log. cos. 72°	= 9.4899824	Log. cos. 36°	= 9.9079576
Log. Pr.	= 2.9951324	Log. Pr.	= 3.4642601
Pr.	= 988,855	Pr.	= 2912,462

$$\text{Tang. } BAE = \frac{2122{,}336 + 3043{,}381 - 2116{,}027}{2000 - 1431{,}534 + 988{,}855 - 2912{,}462} = \frac{3049{,}69}{-1355{,}996}$$

$$\text{Tang. } A = \frac{3\,049\,690}{1\,355\,996}. \qquad A = 66^\circ\ 4'\ 38{,}5'' \quad E = 77^\circ\ 55'\ 21{,}5''$$

$$AE^2 = 3049{,}69^2 + 1355{,}996^2. \qquad AE = 3336{,}298$$

Vérification.

Vérification.

$AE = AB$ cof. $180° - A$	$= AB$ cof. $113° 55' 21,5''$	$= -AB$ cof. $66° 4' 38,5''$
BC cof. $180° - (A+B$	BC cof. $10° 4' 38,5''$	$+BC$ cof. $10° 4' 38,5''$
CD cof. $180° - (D+E$	CD cof. $41° 55' 21,5''$	$+CD$ cof. $41° 55' 21,5''$
DE cof. $180° -$ E	DE cof. $112° 4' 38,5''$	$-DE$ cof. $77° 55' 21,5''$

Log. AB	= 3.3010300	Log. BC	= 3.4082400
Log. cof. 66° 4' 38,5''	= 9 6079638	Log. cof. 10° 4' 38,5''	= 9.9932477
Log. Pr.	= 2.9089938	Log. Pr.	= 3.4014877
Pr.	= 810,95	Pr.	= 2520,508
Log. CD	= 3.5051500	Log. DE	= 3.5563025
Log. cof. 41° 55' 21,5''	= 9.8715998	Log. cof. 77° 55' 21,5''	= 9.3206289
Log. Pr.	= 3.3767498	Log. Pr.	= 2.8769314
Pr.	= 2380,95	Pr.	= 753,236

$AE = 3337,272$. L'erreur eft environ $\frac{1}{3500}$ du total feulement.

Troifième Exemple. Rélatif au fecond Cas du premier Problème.

Soit $ABCDEF$ un Hexagone, dont on connoît tous les Côtés excepté AF; & les Angles exceptés les deux Angles adjacens C & D.

Côtés.	Angles extérieurs.	Equation.	
$AB = 2400$	$A = 54°$	AB fin. A	$= DE$ fin. $E+F$
$BC = 2700$	$B = 62°$	BC fin. $A+B$	EF fin. F
$CD = 3200$	$E = 64°$	CD fin. $A+B+C$	
$DE = 3500$	$F = 72°$		
$EF = 3750$			

Donc; CD fin. $116° + C = -AB$ fin. $54°$
$-BC$ fin. $116°$
$+DE$ fin. $136°$
$+EF$ fin. $72°$

Log. AB	= 3.3802112	Log. BC	= 3.4313638
Log. fin. 54°	= 9.9079576	Log. fin. 64°	= 9.9536602
Log. Pr.	= 13.2881688	Log. Pr.	= 13.3850240
Log. CD	= 3.5051500	Log. CD	= 3.5051500
Log. Quot.	= 9.7830188	Log. Quot.	= 9.8798740
Quot.	= 0,6067627	Quot.	= 0,7583575

Q

$$\begin{array}{lcl}
\textit{Log. DE} & = & 3.5440680 \\
\textit{Log. sin.}\ 44^\circ & = & 9.8417713 \\ \hline
\textit{Log. Pr.} & = & 13.3858393 \\
\textit{Log. CD} & = & 3.5051500 \\ \hline
\textit{Log. Quot.} & = & 9.8806893 \\
\textit{Quot.} & = & 0,7597825
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\textit{Log. EF} & = & 3.5740313 \\
\textit{Log. sin.}\ 72^\circ & = & 9.9782063 \\ \hline
\textit{Log. Pr.} & = & 13.5522376 \\
\textit{Log. CD} & = & 3.5051500 \\ \hline
\textit{Log. Quot.} & = & 10.0470876 \\
\textit{Quot.} & = & 1,1145195
\end{array}$$

$$\textit{Sin.}\ 116^\circ + C = 0,5091818$$

$$116^\circ + C = \begin{array}{l} 30^\circ\ 36'\ 33,6'' \\ 149^\circ\ 23'\ 26,4''. \end{array}$$

A la première Valeur répond un Angle rentrant adjacent à l'Angle extérieur C.

Suppofant qu'on fait d'ailleurs que la Figure n'a aucun Angle rentrant, on a $C = 33^\circ\ 23'\ 26,4''$

$$D = 14^\circ\ 36'\ 33,6''$$

$$\text{De-là ; } AF = \begin{array}{l}
-AB\ cof.\ 54^\circ \\
+BC\ cof.\ 64^\circ \\
+CD\ cof.\ 30^\circ\ 36'\ 33,6'' \\
+DE\ cof.\ 44^\circ \\
-EF\ cof.\ 72^\circ,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\textit{Log. AB} & = & 3.3802112 \\
\textit{Log. cof.}\ 54^\circ & = & 9.7692187 \\ \hline
\textit{Log. Pr.} & = & 3.1494299 \\
\textit{Pr.} & = & 1410,685
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\textit{Log. BC} & = & 3.4313638 \\
\textit{Log. cof.}\ 64^\circ & = & 9.6418420 \\ \hline
\textit{Log. Pr.} & = & 3.0732058 \\
\textit{Pr.} & = & 1183,602
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\textit{Log. CD} & = & 3.5051500 \\
\textit{Log. cof.}\ 30^\circ\ 36'\ 33,6'' & = & 9.9348310 \\ \hline
\textit{Log. Pr.} & = & 3.4399810 \\
\textit{Pr.} & = & 2754,108
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
\textit{Log. DE} & = & 3.5440680 \\
\textit{Log. cof.}\ 44^\circ & = & 9.8569341 \\ \hline
\textit{Log. Pr.} & = & 3.4010021 \\
\textit{Pr.} & = & 2517,69
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\textit{Log. EF} & = & 3.5740313 \\
\textit{Log. cof.}\ 72^\circ & = & 9.4899824 \\ \hline
\textit{Log. Pr.} & = & 3.0640137 \\
\textit{Pr.} & = & 1158,81
\end{array}$$

$$AF = \begin{array}{l} 1183,602 \\ 2754,108 \\ 2517,69 \end{array} - \begin{array}{l} 1410,685 \\ 1158,81 \end{array}$$

$$= 6455,400 - 2569,495$$

$$= 3885,905$$

Pour la vérification, je chercherai immédiatement le Côté AF, d'après l'une des Equations du §. XXXI.

$$\text{On a ; } CD^2 = \left(\begin{array}{l} CB \cos. B+A \\ BA \cos. \quad A \\ AF \\ FE \cos. \quad F \\ ED \cos. E+F \end{array}\right)^2 + \left(\begin{array}{l} -CB \sin. B+A \\ -BA \sin. \quad A \\ \\ +FE \sin. \quad F \\ +ED \sin. E+F \end{array}\right)^2.$$

$$\text{Donc, } \left(\begin{array}{l} CB \cos. B+A \\ BA \cos. \quad A \\ AF \\ FE \cos. \quad F \\ ED \cos. E+F \end{array}\right)^2 = CD^2 - \left(\begin{array}{l} -CB \sin. B+A \\ -BA \sin. \quad A \\ \\ +FE \sin. \quad F \\ +ED \sin. E+F \end{array}\right)^2.$$

$$\begin{array}{llll} CB \sin. B+A = 2416{,}744 & & CB \cos. B+A = -1186{,}602 \\ BA \sin. \quad A = 1941{,}64 & & BA \cos. \quad A = 1410{,}685 \\ FE \sin. \quad F = 3566{,}462 & & FE \cos. \quad F = 1158{,}81 \\ ED \sin. E+F = 2431{,}305 & & ED \cos. E+F = -2517{,}69 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{De-là ; } (AF - 1134{,}797)^2 &= 3100^2 - 1629{,}383^2 \\ &= 4829{,}383 \times 1570{,}617 \\ AF - 1134{,}797 &= 2750{,}94 \\ AF &= 3885{,}737 \end{aligned}$$

La différence n'eſt pas $\frac{1}{20000}$ du Total.

Quatrième Exemple. Rélatif au troiſième Cas du premier Problême.

Soit *ABCDEF* un Hexagone, dont on connoît les Côtés excepté *AF* ; & les Angles, exceptés *B* & *E*. On demande ce Côté & ces Angles.

Soit menée la Diagonale *BE*. Dans le Quadrilatère *BCDE*, on connoît les Côtés excepté *BE*, & les Angles exceptés ceux en *B* & *E* ; donc (premier Cas) on peut calculer ce Côté & ces Angles. De-là ; dans le Quadrilatère *ABEF*, on connoît les Côtés excepté *AF* ; & les Angles exceptés les adjacens en *B* & *E*. Donc, on peut calculer ce Côté & ces Angles.

Côtés.	Angles extérieurs.
$AB = 1200$	$A = 64°$
$BC = 1500$	
$CD = 1600$	$C = 72°$
$DE = 1800$	$D = 75°$
$EF = 2000$	$F = 84°$

$$\text{Tang. } CBE = \frac{CD \sin. 72° + DE \sin. 147°}{BC + CD \cos. 72° + DE \cos. 147°} = \frac{CD \sin. 72° + DE \sin. 33°}{BC + CD \cos. 72° - DE \cos. 33°}$$

$\text{Log. } CD = 3.2041200$
$\text{Log. sin. } 72^\circ = 9.9782063$
$\text{Log. Pr.} = 3.1823263$
$\text{Pr.} = 1521{,}69$

$\text{Log. } CD = 3.2041200$
$\text{Log. cos. } 72^\circ = 9.4899824$
$\text{Log. Pr.} = 2.6941024$
$\text{Pr.} = 494{,}427$

$\text{Log. } DE = 3.2552725$
$\text{Log. sin. } 33^\circ = 9.7361088$
$\text{Log. Pr.} = 2.9913813$
$\text{Pr.} = 980{,}35$

$\text{Log. } DE = 3.2552725$
$\text{Log. cos. } 33^\circ = 9.9235914$
$\text{Log. Pr.} = 3.1788639$
$\text{Pr.} = 1509{,}607$

$$\text{Tang. } CBE = \frac{1521{,}69 + 980{,}35}{1500 + 494.427 - 1509.607} = \frac{250\,204}{48\,482}$$

$CBE = 79^\circ\ 2'\ 1{,}4''$
$DEB = 67^\circ\ 57'\ 58{,}6''$

$EB = BC \cos. 79^\circ\ 2'\ 1{,}4''$
$\quad CD \cos. 7^\circ\ 2'\ 1{,}4''$
$\quad DE \cos. 67^\circ\ 57'\ 58{,}6''$

$\text{Log. } BC = 3.1760913$
$\text{Log. cos. } 79^\circ\ 2'\ 1{,}4'' = 9.2792826$
$\text{Log. Pr.} = 2.4553739$
$\text{Pr.} = 285{,}347$

$\text{Log. } CD = 3.2041200$
$\text{Log. cos. } 7^\circ\ 2'\ 1{,}4'' = 9.9967193$
$\text{Log. Pr.} = 3.2008393$
$\text{Pr.} = 1587{,}96$

$\text{Log. } DE = 3.2552725$
$\text{Log. cos. } 67^\circ\ 57'\ 58{,}6'' = 9.5742076$
$\text{Log. Pr.} = 2.8294801$
$\text{Pr.} = 675{,}274$

$EB = 2548{,}581.$

Dans le Quadrilatère $ABEF$; $AB \text{ sin. } A$
$BE \text{ sin. } A{+}B = EF \text{ sin. } F.$

$\text{Log. } EF = 3.3010300$
$\text{Log. sin. } F = 9.9976143$
$\text{Log. Pr.} = 13.2986443$
$\text{Log. } BE = 3.4062985$
$\text{Log. Quot.} = 9.8923458$
$\text{Quot.} = 0.780451$

$\text{Log. } AB = 3.0791812$
$\text{Log. sin. } A = 9.9536602$
$\text{Log. Pr.} = 13.0328414$
$\text{Log. } BE = 3.4062985$
$\text{Log. Quot.} = 9.6265429$
$\text{Quot.} = 0.423198$

$\text{Sin. } A{+}B = 0{,}3572530 \qquad A{+}B = \begin{matrix} 20^\circ\ 55'\ 53{,}7'' \\ 159^\circ\ 4'\ 6{,}3'' \end{matrix}$

Partant, si la Figure n'a que des Angles saillans ;

$B = 95^\circ\ 4'\ 6{,}3''$
$ABE = 84^\circ\ 55'\ 53{,}7''$
$FEB = 63^\circ\ 4'\ 6{,}3''$

Donc, $ABC = 163^\circ\ 57'\ 55{,}1''$
$FED = 131^\circ\ 2'\ 4{,}9''$

$AF =$

$$AF = \begin{matrix} -AB\ cos.\ A \\ -BE\ cos.\ A+B \\ -EF\ cos.\ F \end{matrix} = \begin{matrix} -AB\ cos.\ 64^{\circ} \\ +BE\ cos.\ 20^{\circ}\ 55'\ 53{,}7'' \\ -EF\ cos.\ 84^{\circ} \end{matrix}$$

Log. AB	= 3.0791812	Log. BE	= 3.4062985
Log. cos. 64°	= 9.6418420	Log. cos. 20° 55′ 53,7″	= 9.9703504
Log. Pr.	= 2.7210232	Log. Pr.	= 3.3766489
Pr.	= 526,045	Pr.	= 2380,394

Log. EF	= 3.3010300
Log. cos. 84°	= 9.0192346
Log. Pr.	= 2.3202646
Pr.	= 109,057

$AF = 1645{,}292.$

Pour la vérification, je vais chercher si je trouverai à-peu-près la même valeur de AF; d'après l'Equation suivante, tirée du §. XXXI.

$$\left(\begin{matrix} BC \\ CD\ cos.\ C \\ DE\ cos.\ C+D \end{matrix}\right)^2 + \left(\begin{matrix} CD\ sin.\ C \\ DE\ sin.\ C+D \end{matrix}\right)^2 = \left(\begin{matrix} BA\ cos.\ A \\ AF \\ FE\ cos.\ F \end{matrix}\right)^2 + \left(\begin{matrix} -BA\ sin.\ A \\ " \\ +EF\ sin.\ F \end{matrix}\right)^2.$$

Ou,
$$\left(\begin{matrix} BA\ cos.\ A \\ AF \\ FE\ cos.\ F \end{matrix}\right)^2 = \left(\begin{matrix} BC \\ CD\ cos.\ C \\ DE\ cos.\ C+D \end{matrix}\right)^2 + \left(\begin{matrix} CD\ sin.\ C \\ DE\ sin.\ C+D \end{matrix}\right)^2 - \left(\begin{matrix} -BA\ sin.\ A \\ " \\ +EF\ sin.\ F \end{matrix}\right)^2.$$

Log. CD	= 3.2041200	Log. DE	= 3.2552725
Log. cos. 72°	= 9.4899824	Log. cos. 33°	= 9.9235914
Log. Pr.	= 2.6941024	Log. Pr.	= 3.1788639
Pr.	= 494,4272	Pr.	= 1509,607
Log. CD	= 3.2041200	Log. DE	= 3.2552725
Log. sin. 72°	= 9.9782063	Log. sin. 33°	= 9.7361088
Log. Pr.	= 3.1823263	Log. Pr.	= 2.9913813
Pr.	= 1521,69	Pr.	= 980,35
Log. BA	= 3.0791812	Log. EF	= 3.3010300
Log. sin. 64°	= 9.9536602	Log. sin. 84°	= 9.9976143
Log. Pr.	= 3.0328414	Log. Pr.	= 3.2986443
Pr.	= 1078,552	Pr.	= 1989,044

Donc, $\left(\begin{array}{l} BA\ cos.A \\ AF \\ FE\ cos.F \end{array}\right)^2 = 484,82^2 + 2502,04^2 - 910,491^2 = 5\,666\,258,911936$

$\begin{array}{l} BA\ cos.A \\ AF \\ EF\ cos.F \end{array} = 2380,390$; ou, $\begin{array}{c} 526,045 \\ AF \\ 209,057 \end{array} = 2380,390$;

$AF = \dfrac{2380,390}{-\ 735,102} = 1645,288$. La différence n'eſt pas $\frac{1}{400\,000}$ du Total.

Cinquième Exemple, rélatif au ſecond Problême.

Soit *ABCDEF* un Hexagone dont on connoît tous les Angles, & tous les Côtés exceptés *AF* & *CD*.

Côtés donnés.		Angles extérieurs.	
AB	= 2200	*A*	= 96°
BC	= 2400	*B*	= 54°
		C	= 20°
DE	= 4800	*D*	= 24°
		E	= 18°
EF	= 5200	*F*	= 148°

Par le §. XV on a $\begin{array}{l} AB\ ſin.\ 96^\circ \\ BC\ ſin.\ 150^\circ \\ CD\ ſin.\ 170^\circ \end{array} = \begin{array}{l} DE\ ſin.\ 166^\circ \\ EF\ ſin.\ 148^\circ \end{array}$ ou, $\begin{array}{l} AB\ ſin.\ 84^\circ \\ BC\ ſin.\ 30^\circ \\ CD\ ſin.\ 10^\circ \end{array} = \begin{array}{l} DE\ ſin.\ 14^\circ \\ EF\ ſin.\ 32^\circ. \end{array}$

Donc, $CD = \begin{array}{l} DE\ ſin.\ 14^\circ\ coſec.\ 10^\circ \\ EF\ ſin.\ 32^\circ\ coſec.\ 10^\circ \end{array} - \begin{array}{l} AB\ ſin.\ 84^\circ\ coſec.\ 10^\circ \\ BC\ ſin.\ 30^\circ\ coſec.\ 10^\circ. \end{array}$

De même $AF = \begin{array}{l} DE\ ſin.\ 24^\circ\ coſec.\ 10^\circ \\ EF\ ſin.\ 42^\circ\ coſec.\ 10^\circ \end{array} - \begin{array}{l} CB\ ſin.\ 20^\circ \\ BA\ ſin.\ 74^\circ. \end{array}$

Log. DE	= 3.6812412	Log. EF	= 3.7160033
Log. *ſin.* 14°	= 9.3836752	Log. *ſin.* 32°	= 9.7242097
Log. *coſec.* 10°	= 10.7603298	Log. *coſec.* 10°	= 10.7603298
Log. *Pr.*	= 3.8252462	Log. *Pr.*	= 4.2005428
Pr.	= 6687,23	*Pr.*	= 15868,76
Log. *AB*	= 3.3424227	Log. BC	= 3.3802112
Log. *ſin.* 84°	= 9.9976143	Log. *ſin.* 30°	= 9.6989700
Log. *coſec.* 10°	= 10.7603298	Log. *coſec.* 10°	= 10.7603298
Log. *Pr.*	= 4.1003668	Log. *Pr.*	= 3.8395110
Pr.	= 12599,888	*Pr.*	= 6910,523

Log. DE = 3.6812412
Log. *sin.* 24° = 9.6093133
Log. *cosec.* 10° = 10.7603298

Log. Pr. = 4.0508843
Pr. = 11243,05

Log. EF = 3.7160033
Log. *sin.* 42° = 9.8255109
Log. *cosec.* 10° = 10.7603298

Log. Pr. = 4.3018440
Pr. = 20037,52

Log. AB = 3.3424227
Log. *sin.* 74° = 9.9828416
Log. *cosec.* 10° = 10.7603298

Log. Pr. = 4.0855941
Pr. = 12178,51

Log. BC = 3.3802112
Log. *sin.* 20° = 9.5340517
Log. *cosec.* 10° = 10.7603298

Log. Pr. = 3.6745927
Pr. = 4727,077

$$CD = \begin{array}{r} 6687{,}23 \\ 15868{,}76 \end{array} - \begin{array}{r} 12599{,}888 \\ 6910{,}523 \end{array}$$
$$= 22555{,}99 - 19510{,}411$$
$$= 3045{,}579$$

$$AF = \begin{array}{r} 11243{,}05 \\ 20037{,}52 \end{array} - \begin{array}{r} 12178{,}51 \\ 4727{,}077 \end{array}$$
$$= 31280{,}57 - 16905{,}587$$
$$= 14374{,}983$$

Pour la vérification, je chercherai si ces Valeurs de *CD* & *AF*, s'accordent avec l'Equation.

$$AF = \begin{array}{l} AB \cos.\ 180^\circ - A \\ BC \cos.\ 180^\circ - (A+B \\ CD \cos.\ 180^\circ - (A+B+C \\ DE \cos.\ 180^\circ - (E+F \\ EF \cos.\ 180^\circ - \quad F \end{array} = \begin{array}{l} AB \cos.\ 84^\circ \\ BC \cos.\ 30^\circ \\ CD \cos.\ 10^\circ \\ DE \cos.\ 14^\circ \\ EF \cos.\ 32^\circ. \end{array}$$

Log. AB = 3.3424227
Log. *cos.* 84° = 9.0192346

Log. Pr. = 2.3616573
Pr. = 229,9626

Log. BC = 3.3802112
Log. *cos.* 30° = 9.9375306

Log. Pr. = 3.3177418
Pr. = 2078,46

Log. CD = 3.4836984
Log. *cos.* 10° = 9.9933515

Log. Pr. = 3.4770499
Pr. = 2999,507

Log. DE = 3.6812412
Log. *cos.* 14° = 9.9869041

Log. Pr. = 3.6681453
Pr. = 4657,42

Log. EF = 3.7160033
Log. *cos.* 32° = 9.9284205

Log. Pr. = 3.6444238
Pr. = 4409,85

$$AF = \begin{array}{r} 229,\ 9626 \\ 2078,\ 46 \\ 2999,\ 507 \\ 4657,\ 42 \\ 4409,\ 85 \\ \hline 14375,\ 1996 \end{array}$$

L'erreur n'est pas $\frac{1}{70000}$ du total.

Sixième Exemple, rélatif au troisième Problême.

Soit *ABCDEFGHI* un Ennéagone dont on connoît tous les Côtés, & tous les Angles exceptés ceux qui ont leurs Sommets en *A*, *D*, *G*.

Côtés donnés.

AB,	*BC*,	*CD*,	*DE*,	*EF*,	*FG*,	*GH*,	*HI*,	*IA*.
2400,	2700,	2800,	3200,	3500,	3800,	4000,	4200,	4500.

Angles extérieurs donnés.

$B = 40^\circ$, $C = 32^\circ$, $E = 36^\circ$, $F = 45^\circ$, $H = 48^\circ$, $I = 50^\circ$.

1°. Dans le Quadrilatère *ABCD*, on ignore le Côté *AD* & les Angles qui lui sont adjacens.

Donc, $$Tang.\, BAD = \frac{BC\, fin.\, B + CD\, fin.\, B+C}{AB + BC\, cof.\, B + CD\, cof.\, B+C} = \frac{BC\, fin.\, 40^\circ + CD\, fin.\, 72^\circ}{AB + BC\, cof.\, 40^\circ + CD\, cof.\, 72^\circ}$$

Log. BC	=	3.4313638	*Log. BC*	=	3.4313638
Log. fin. 40°.	=	9.8080675	*Log. cof.* 40°	=	9.8842540
Log. Pr.	=	3.2394313	*Log. Pr.*	=	3.3156178
Pr.	=	1735,527	*Pr.*	=	2068,32
Log. CD	=	3.4471580	*Log. CD*	=	3.4471580
Log. fin. 72°	=	9.9782063	*Log. cof.* 72°	=	9.4899824
Log. Pr.	=	3.4253643	*Log. Pr.*	=	2.9371404
Pr.	=	2662,958	*Pr.*	=	865,2476

$$Tang.\, BAD = \frac{1735,527 + 2662,958}{2400 + 2068,32 + 865,2476} = \frac{4398,485}{5333,5676}$$

$BAD = 39^\circ\ 30'\ 42,1''$
$CDA = 32^\circ\ 29'\ 17,9''$

$$AD = \begin{cases} AB\ cof.\ 39^\circ\ 30'\ 42,1'' \\ BC\ cof.\ \ \ 29'\ 17,9'' \\ CD\ cof.\ 32^\circ\ 29'\ 17,9'' \end{cases}$$

Log. AB	=	3.3802112	*Log. BC*	=	3.4313638
Log. cof. 39° 30′ 42,1″	=	9.8873329	*Log. cof.* 29′ 17,9″	=	9.9999842
Log. Pr.	=	3.2675441	*Log. Pr.*	=	3.4313480
Pr.	=	1851,587	*Pr.*	=	2699,903
Log. CD	=	3.4471580			
Log. cof. 32° 29′ 17,9″	=	9.9260856			
Log. Pr.	=	3.3732436			
Pr.	=	2361,802			

AD = 1851, 587
2699, 903
2361, 802
= 6913, 292

Je trouve la même Valeur, en extrayant la Racine quarrée de la Somme des Quarrés des deux Termes de la Fraction qui exprime la Tangente de *BAD*.

2°. Dans

2°. Dans le Quadrilatère *DEFG*, on ignore le Côté *DG* & les Angles qui lui font adjacens.

Donc, $Tang.\ EDG = \frac{EF\ fin.E + FG\ fin.E+F}{DE + EF\ cof.E + FG\ cof.E+F} = \frac{EF\ fin.36^\circ + FG\ fin.\ 81^\circ}{DE + EF\ cof.36^\circ + FG\ cof.81^\circ}$

Log. EF = 3.5440680		*Log. EF* = 3.5440680	
Log. fin. 36° = 9.7692187		*Log. cof.* 36° = 9.9079576	
Log. Pr. = 3.3132867		*Log. Pr.* = 3.4520256	
Pr. = 2057,248		*Pr.* = 2831,56	
Log. FG = 3.5797836		*Log. FG* = 3.5797836	
Log. fin. 81° = 9.9946199		*Log. cof.* 81° = 9.1943324	
Log. Pr. = 3.5744035		*Log. Pr.* = 2.7741160	
Pr. = 3753,215		*Pr.* = 594,451	

$Tang.\ EDG = \frac{2057,248 + 3753,215}{3200 + 2831,56 + 594,451} = \frac{5810,463}{6626,011}.$

EDG = 41° 14′ 53″
FGD = 39° 45′ 7″

DG = *DE cof.* 41° 14′ 53″ + *EF cof.* 5° 14′ 53″ + *FG cof.* 39° 45′ 7″

Log. DE = 3.5051500	*Log. EF* = 3.5440680
Log. cof. 41° 14′ 53″ = 9.8761382	*Log. cof.* 5° 14′ 53″ = 9.9981756
Log. Pr. = 3.3812882	*Log. Pr.* = 3.5422436
Pr. = 2405,958	*Pr.* = 3485,327
Log. FG = 3.5797836	
Log. cof. 39° 45′ 7″ = 9.8858246	
Log. Pr. = 3.4656082	
Pr. = 2921,518	

DG = 2405,958 + 3485,327 + 2921,518 = 8812,803

Je trouve encore la même Valeur, en prenant la Racine quarrée de la Somme des Quarrés des deux Termes de la Fraction qui exprime la Tangente de *EDG*.

3°. Dans le Quadrilatère *GHIA*, on ignore le Côté *AG* & les Angles qui lui font adjacens.

Donc, $Tang.\ HGA = \frac{HI\ fin.H + IA\ fin.H+I}{GH + HI\ cof.H + IA\ cof.H+I} = \frac{HI\ fin\ 48^\circ + IA\ fin\ 98^\circ}{GH + HI\ cof.48^\circ - IA\ cof.82^\circ}.$

Log. HI = 3.6232493	*Log. HI* = 3.6232493
Log. fin. 48° = 9.8710735	*Log. cof.* 48° = 9.8255109
Log. Pr. = 3,4943228	*Log. Pr.* = 3.4487602
Pr. = 3121,209	*Pr.* = 2810,35

S

$$\begin{aligned} Log.\ IA &= 3.6532125 \\ Log.\ \mathit{sin}.\ 82^\circ &= 9.9957528 \\ \hline Log.\ Pr. &= 3.6489653 \\ Pr. &= 4456{,}205 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Log.\ IA &= 3.6532125 \\ Log.\ \mathit{cof}.\ 82^\circ &= 9.1435553 \\ \hline Log.\ Pr. &= 2.7967678 \\ Pr. &= 626{,}279 \end{aligned}$$

$$Tang.\ HGA = \frac{3121{,}209 + 4456{,}205}{4000 + 2810{,}35 - 626{,}279} = \frac{7577{,}414}{6184{,}071}$$

$$\begin{aligned} HGA &= 50^\circ\ 46'\ 53{,}2'' \\ IAG &= 47^\circ\ 13'\ 6{,}8'' \end{aligned} \qquad AG = \begin{cases} GH\ \mathit{cof}.\ 50^\circ\ 46'\ 53{,}2'' \\ HI\ \mathit{cof}.\ 2^\circ\ 46'\ 53{,}2'' \\ IA\ \mathit{cof}.\ 47^\circ\ 13'\ 6{,}8''. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Log.\ GH &= 3.6020600 \\ Log.\ \mathit{cof}.\ 50^\circ\ 46'\ 53{,}2'' &= 9.8009096 \\ \hline Log.\ Pr. &= 3.4029696 \\ Pr. &= 2529{,}121 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Log.\ HI &= 3.6232493 \\ Log.\ \mathit{cof}.\ 2^\circ\ 46'\ 53{,}2'' &= 9.9994881 \\ \hline Log.\ Pr. &= 3.6227374 \\ Pr. &= 4195{,}053 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Log.\ IA &= 3.6532125 \\ Log.\ \mathit{cof}.\ 47^\circ\ 13'\ 6{,}8'' &= 9.8320001 \\ \hline Log.\ Pr. &= 3.4852126 \\ Pr. &= 3056{,}417 \end{aligned} \qquad AG = \begin{array}{r} 2529{,}121 \\ 4195{,}053 \\ 3056{,}417 \\ \hline 9780{,}591 \end{array}$$

Je trouve encore la même Valeur en prenant la Racine quarrée de la Somme des Quarrés des deux Termes de la Fraction qui exprime la Valeur de la Tangente de HGA.

4°. Dans le Triangle ADG, on connoît les trois Côtés $\begin{aligned} AD &= 6913{,}292 \\ DG &= 8812{,}803 \\ GA &= 9780{,}591 \end{aligned}$

Partant, on pourra connoître les Angles de ce Triangle ; par exemple, par la Formule

$$\mathit{sin}.\ \tfrac{1}{2}\ DAG = \sqrt{\frac{\frac{DG+GA-AD}{2} \times \frac{DG-GA+AD}{2}}{AD \times AG}} = \sqrt{\frac{5840{,}051 \times 2972{,}752}{6913{,}292 \times 9780{,}591}}.$$

$$\begin{aligned} \text{De-là},\ DAG &= 60^\circ\ 53'\ 25'' \\ AGD &= 43^\circ\ 15'\ 54{,}2'' \\ ADG &= 75^\circ\ 50'\ 39{,}6'' \\ \hline \text{Somme} &= 179^\circ\ 59'\ 58{,}8''. \quad \text{Erreur},\ 1{,}2''. \end{aligned}$$

$$IAB = \begin{array}{r} 47^\circ\ 13'\ 6{,}8'' \\ 60^\circ\ 53'\ 25'' \\ 39^\circ\ 30'\ 42{,}1'' \\ \hline = 147^\circ\ 37'\ 13{,}9'' \end{array} \qquad CDE = \begin{array}{r} 32^\circ\ 29'\ 17{,}9'' \\ 75^\circ\ 50'\ 39{,}6'' \\ 41^\circ\ 14'\ 53'' \\ \hline = 149^\circ\ 34'\ 50{,}5'' \end{array} \qquad FGH = \begin{array}{r} 39^\circ\ 45'\ 7'' \\ 43^\circ\ 15'\ 54{,}2'' \\ 50^\circ\ 46'\ 53{,}2'' \\ \hline = 133^\circ\ 47'\ 54{,}4'' \end{array}$$

$$A = 32^\circ\ 22'\ 46{,}1'' \qquad D = 30^\circ\ 25'\ 9{,}5'' \qquad G = 46^\circ\ 12'\ 5{,}6''$$

Pour servir de vérification générale, j'ai cherché la valeur de *AI*, d'après l'Equation

$$AI = \begin{array}{l} -AB \cos. A \\ -BC \cos. A+B \\ +CD \cos. 180^\circ-(A+B+C \\ +DE \cos. 180^\circ-(A+B+C+D \\ +EF \cos. 180^\circ-(A+B+C+D+E \\ +FG \cos. 180^\circ-(G+H+I \\ +GH \cos. 180^\circ-(\quad H+I \\ -HI \cos. \qquad\quad I \end{array} = \begin{array}{l} -AB \cos. 32^\circ\ 22'\ 46{,}1'' \\ -BC \cos. 72^\circ\ 22'\ 46{,}1'' \\ +CD \cos. 75^\circ\ 37'\ 13{,}9'' \\ +DE \cos. 45^\circ\ 12'\ 4{,}4'' \\ +EF \cos. 9^\circ\ 12'\ 4{,}4'' \\ +FG \cos. 35^\circ\ 47'\ 54{,}4'' \\ +GH \cos. 82^\circ \\ -HI \cos. 50^\circ. \end{array}$$

J'ai trouvé $AI = 5499{,}36$.

L'erreur - - - - - - 0,64 est à-peu-près $\frac{1}{2600}$ du Total.

Quant au procédé immédiat, pour trouver les Angles cherchés, j'avoue que j'ai été rebuté par sa longueur quand j'ai voulu l'appliquer à une Figure d'un nombre de Côtés aussi grand que neuf. Et je pense que le procédé médiat est préférable dans tous les Cas, même dans celui où les trois Angles inconnus sont adjacens les uns aux autres, dans lequel seul le Cosinus de l'Angle moyen se trouve immédiatement par une Equation du premier degré, & les deux autres sont décomposés en deux parties par la Diagonale qui joint leurs Sommets.

Fin de la Polygonométrie.

APPENDICE.

Lieu à la Ligne droite, lié avec la Polygonométrie.

§. *a*. DANS l'Ouvrage précédent, & tout particuliérement dans le §. XXIV, j'ai été appelé à m'occuper de la Somme des Rectangles des Perpendiculaires abaissées d'un Point pris sur le Plan d'une Figure rectiligne, par ceux des Côtés de cette Figure sur lesquels elles sont abaissées. De ce Cas particulier, il est naturel de passer à un Problême plus général, & de s'occuper de la Somme des Rectangles des Perpendiculaires abaissées d'un Point pris sur le Plan d'une Figure par des Droites quelconques données de grandeur. Et comme l'objet de cette recherche est indéterminé, & qu'en particulier il y a plusieurs Points qui jouissent à cet égard d'une même propriété; par exemple, que la Somme des Rectangles répondante à ces Points est constante: il est naturel de rechercher la Position de ceux de ces Points qui jouissent tous de cette même Propriété. C'est l'objet dont je me propose de m'occuper dans cette Dissertation.

Comme le Cas où les Droites données de position partent d'un même Point, est plus simple que celui où ces Droites ont une Position quelconque; j'ai cru convenable de commencer par ce premier Cas, & de chercher ensuite à lui réduire le second Cas: c'est ce que j'ai fait avec le plus heureux succès.

Je ne m'occupe pas du Cas où les Droites données de position sont parallèles entr'elles: il se réduit avec la plus grande facilité à ce Problême déterminé. Un nombre quelconque de Points étant donnés de position sur une Ligne droite: Trouver sur la même Droite un Point tel que la Somme des Rectangles de ses Distances aux Points donnés par des Droites données, soit donnée de Grandeur.

Je ne m'occupe que du Cas du Perpendicularisme. Le Cas où les Droites à mener sont obliques aux Droites données de position, se réduit évidemment au premier; en substituant aux Droites données de grandeur des Droites plus grandes qu'elles dans le Rapport du Sinus total au Sinus de l'Angle d'obliquité.

Quoique le procédé que je suivrai soit général, & qu'il ne dépende point du nombre des Droites données de Position, j'ai cru devoir y introduire par des Exemples particuliers, qui faciliteront aux jeunes Géomètres l'intelligence de la Proposition générale.

PREMIER

PREMIER CAS.

Les Droites données de Position partent d'un même Point.

§. b. *Exemple.* Soient SA, SB, SC, *trois Droites données de position* sur un Plan & partant d'un même Point. On demande le Lieu des Points Y de chacun desquels abaissant des Perpendiculaires YA', YB', YC', sur les Droites SA, SB, SC; la Somme ou les différences de leurs Rectangles par trois Droites données de grandeur, soient égales à un Espace Q donné de grandeur. Fig. XV.

Division. On doit d'abord déterminer quelles sont les Directions des Perpendiculaires à chacune des Droites données de position qu'on regarde comme positives ou additives; ensorte que les Perpendiculaires aux mêmes Droites qui ont une direction opposée sont négatives ou soustractives.

Les Angles ASB, ASC, allant en croissant; que ce dernier soit plus petit que deux Droits. Soient prolongées les Droites AS, BS, CS, au-delà du Point S, en A'', B'', C''. Le Plan des Droites données de position est partagé en six Régions : $C''SA$, ASB, BSC, CSA'', $A''SB''$, BSC''; & partant, il paroît d'abord qu'on a six Positions différentes du Point Y à examiner. Mais je remarque, que les Angles $C''SA$, ASB, BSC, jouent dans cette Question les mêmes rôles que les Angles CSA'', $A''SB''$, $B''SC''$; en changeant les signes rélatifs aux Perpendiculaires abaissées des Points situés dans les premières Régions, conformément aux changemens de Directions de ces Perpendiculaires. Partant, les six Cas auxquels la Question proposée paroît d'abord donner lieu se réduisent à trois.

Je remarque encore, que les Angles extrêmes $C''SA$, BSC, jouent le même rôle; en changeant les signes des Perpendiculaires abaissées sur leurs Jambes non-communes SA, SB; donc, les six Cas qui paroissoient d'abord differens, se réduisent à deux seulement, dans lesquels on s'occupe des Régions $C''SA$, ASB. On a donc à examiner les *deux Positions* du Point Y; $C''SA$ / ASB.

Première Position du Point Y; ce Point est regardé comme étant dans l'Angle $C''SA$.

Subdivision. Ce Cas donne encore lieu à des subdivisions. En effet, les Perpendiculaires abaissées des Points Y situés dans l'Angle $C''SA$, sont regardées comme étant; toutes *trois additives*, ou *deux additives & une soustractive*, ou *une additive & deux soustractives*, ou *toutes trois soustractives* : ce qui paroît donner lieu à huit Cas differens.

Mais ces huit Cas en apparence differens se réduisent à quatre. En effet, tout ce qu'on diroit de deux de ces Perpendiculaires soustractives ou négatives, & une

additive ou positive ; on le diroit de deux Perpendiculaires positives & une négative, abaissées des Points situés dans l'Angle CSA'', opposé au Sommet à l'Angle $C''SA$; vu que les Perpendiculaires abaissées des Points, semblablement situés dans ces deux Angles, sont respectivement égales entr'elles, & ne different que par la Direction ou par le Signe. Partant, tout ce qui aura été dit sur deux Perpendiculaires positives & une négative pour les Points situés dans la Région ASC'', se dira de deux Perpendiculaires négatives & une positive abaissées des Points situés dans le même Angle, en leur substituant les Perpendiculaires abaissées des Points semblablement placés dans l'Angle $A''SC$.

Partant, les huit Cas auxquels paroissent donner lieu les combinaisons de signes des Perpendiculaires abaissées des Points Y, situés dans l'Angle $C''SA$, se réduisent à quatre, dont je vais présenter le Tableau.

YA'	YB'	YC'
+	+	+
+	+	—
+	—	+
—	+	+

Premier Cas de la première Position du Point Y $\begin{matrix} YA', & YB', & YC', \\ + & + & + \end{matrix}$

Analyse. Sur les Droites données de position soient portées des Droites SA, SB, SC, respectivement égales aux Droites données de grandeur. Soit conçue menée SY; & des Points A, B, C, soient conçues abaissées sur SY les Perpendiculaires Aa, Bb, Cc. Les Triangles $\frac{YSA'}{ASa}$, $\frac{YSB'}{BSb}$, $\frac{YSC'}{CSc}$, sont semblables deux à deux ; de-là les Rectangles $\frac{SA \times YA'}{SY \times Aa}$, $\frac{SB \times YB'}{SY \times Bb}$, $\frac{SC \times YC'}{SY \times Cc}$, sont égaux deux à deux. Donc, la Somme des premiers Rectangles est égale à la Somme des derniers ; savoir, au Rectangle de SY par la Somme des Droites Aa, Bb, Cc. Soit Z le Centre commun de Gravité des Points A, B, C ; soit menée SZ ; & soient conçues $\frac{Z\zeta}{YZ'}$ perpendiculaires à $\frac{SY}{SZ}$ respectivement. On a (§. XXXVIII), $Aa + Bb + Cc = 3Z\zeta$; donc, $SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC' = 3SY \times Z\zeta$. Mais les Triangles YSZ', $ZS\zeta$, étant semblables ; $SY \times Z\zeta = SZ \times YZ'$. Donc, $SA \times YA' + SB \times YB' + SC \times YC' = 3SZ \times YZ'$.

Donc, le Rectangle $SZ \times YZ'$ est donné de grandeur ; mais SZ est donnée de grandeur ; donc YZ' est aussi donnée de grandeur. Mais YZ' est perpendiculaire à la Droite SZ donnée de position ; donc, le Point Y est à une Droite donnée de position parallèle à SZ.

Construction. Sur les Droites données de position, soient prises des Droites SA, SB, SC, respectivement égales aux Droites données de grandeur. Soit cherché le Centre commun de Gravité Z, des Points A, B, C. Soit menée SZ. Soit changé l'Espace Q donné de grandeur en un Rectangle ayant pour un de ses Côtés le triple de SZ; & d'un Point quelconque de SZ soit élevée à elle-même une Perpendiculaire égale à l'autre Côté. Par l'extrêmité de cette Perpendiculaire soit menée à SZ une Parallèle; elle sera le lieu cherché.

Démonstration. Soit Y un Point quelconque sur cette Parallèle; duquel soient abaissées les Perpendiculaires YA', YB', YC', YZ', sur les Droites SA, SB, SC, SZ; soit menée SY; & soient Aa, Bb, Cc, Zz, perpendiculaires à SY.

Les Triangles $\frac{YSA',\ YSB',\ YSC',\ YSZ'}{ASa,\ BSb,\ CSc,\ ZSz,}$ sont semblables deux à deux; donc,

les Rectangles $\frac{SA\times YA',\ SB\times YB',\ SC\times YC',\ SZ\times YZ'}{SY\times Aa,\ SY\times Bb,\ SY\times Cc,\ SY\times Zz}$ sont égaux deux à deux.

Mais, $SY\times Aa + SY\times Bb + SY\times Cc = 3SY\times Zz$ (Constr. & §. XXXVIII)

Donc, $SA\times YA' + SB\times YB' + SC\times YC' = 3SZ\times YZ' = Q$.

Remarque première. Le lieu des Points Y étant parallèle à SZ; la Position de ce Lieu rélativement aux Droites données de position, dépend de la Position du Point Z rélativement aux mêmes Droites. Or, le Triangle ABC, étant tout entier dans l'Angle ASC, le Point Z est aussi dans cet Angle; & il est situé, ou dans l'Angle ASB, ou dans l'Angle BSC, ou sur la Droite SB commune à ces deux Angles.

1°. Que le Point Z soit dans l'Angle ASB.

Le lieu des Points Y traverse les Régions $A''SB''$, $B''SC''$, $C''SA$, ASB.

Régions du Point Y.	Signes des Perpendiculaires YA'	YB'	YC'	Equations.
$A''SB''$ . . .	+	−	−	. . . $Q = + SA\times YA' - SB\times YB' - SC\times YC'$
$B''SC''$ . . .	+	+	−	. . . $Q = + SA\times YA' + SB\times YB' - SC\times YC'$
$C''SA$ . . .	+	+	+	. . . $Q = + SA\times YA' + SB\times YB' + SC\times YC'$
ASB . . .	−	+	+	. . . $Q = - SA\times YA' + SB\times YB' + SC\times YC'$

Savoir, les Perpendiculaires qui ont changé de Directions, rélativement à celles qu'on regarde comme positives, sont précédées du Signe de la soustraction.

2°. Que le Point Z soit dans l'Angle BSC.

Le Lieu des Points Y traverse les Régions $B''SC''$, $C''SA$, ASB, BSC.

Régions du Point Y.	Signes des Perpendiculaires: YA'	YB'	YC'
$B''SC''$	+	+	—
$C''SA$	+	+	+
ASB	—	+	+
BSC	—	—	+

3°. Le Point Z étant sur la Droite SB, commune aux deux Angles ASB, CSB; le Lieu des Points Y est dans les Régions $B''SC''$, $C''SA$, ASB; communes aux deux Positions précédentes; & partant, ce troisième Cas rentre dans les deux précédens.

Remarque seconde. On voit par cet Exemple: Qu'on ne peut pas s'occuper de la Somme des Rectangles proposés, en prenant ce mot dans le sens propre; sans s'occuper en même tems des différences de ces Rectangles, correspondantes aux changemens de directions & par conséquent de signes des Perpendiculaires regardées comme positives, suivant une direction déterminée.

Second Cas de la première Position du Point Y. $\begin{matrix} YA' & YB' & YC' \\ + & + & - \end{matrix}$

L'Analyse, la Construction & la Démonstration de ce second Cas, sont les mêmes que celles du premier; en substituant au Point C le Point C'' pris sur le prolongement de CS au-delà de S, de manière que $SC'' = SC$. Il me suffira de justifier cette assertion par l'exposition d'une partie de l'Analyse.

On trouve, tout comme précédemment, $SY\,(Aa+Bb-Cc) = Q$ ou $SY\,(Aa+Bb-C''c'') = Q$; les Points A & B étant regardés comme situés d'un côté de la Droite SY opposé à celui où est le Point C''. Partant, Z est le Centre de Gravité des Points A, B, C''.

Remarque. Z est dans l'Angle BSC''; savoir (en omettant le Cas commun où Z est sur SA); dans l'un des deux Angles ASB, ASC''.

Régions du Point Z.	Régions du Point Y.	Signes des Perpendiculaires. YA'	YB',	YC'.
ASB	$A''SB''$	+	—	+
	$B''SC''$	+	+	+
	$C''SA$	+	+	—
	ASB	—	+	—
ASC''	CSA''	—	—	+
	$A''SB''$	+	—	+
	$B''SC''$	+	+	+
	$C''SA$	+	+	—

Troisième

Troiſième Cas de la première Poſition du Point Y. YA', YB', YC'.
+ — +

Subſtituant à B, le Point B'', de manière que $SB'' = SB$; l'Analyſe, la Conſtruction, & la Démonſtration ſont les mêmes que pour le premier Cas.

Remarque première. Les Points A, C, B'', ſont ſitués de côtés différens rélativement à toute Droite paſſant par S. Donc, le Point Z peut ſe trouver dans chacun des Angles ASC, CSB'', $B''SA$; ou dans chacune des ſix Régions dans leſquelles le Plan eſt diviſé par les Droites données de poſition & par leurs prolongemens; & la Poſition du Point Z dépend des Grandeurs des Droites données, SA, SB'', SC.

On détermine de même les changemens de ſignes des Perpendiculaires abaiſſées des Points Y, correſpondans aux changemens de leurs Directions, ainſi que je l'ai fait dans la Table ſuivante.

Régions du Point Y.	Signes des Perpendiculaires.		
	YA',	YB',	YC'.
ASC''	+	—	+
$C''SB''$	+	—	—
$B''SA''$	+	+	—
$A''SC$	—	+	—
CSB	—	+	+
BSA	—	—	+

Remarque ſeconde. La poſſibilité que le Point Z ſe trouve dans chacune des ſix Régions dans leſquelles eſt diviſé le Plan des Droites données de poſition par ces Droites & par leurs prolongemens; établit une première différence entre ce Cas & ceux qui le précèdent. Mais il en eſt une beaucoup plus grande encore; ſavoir, la poſſibilité de l'indétermination du Lieu propoſé.

En effet, le Lieu des Points Y étant parallèle à SZ; pour que ce Lieu ſoit déterminé, la Ligne SZ elle-même doit être déterminée; & pour cela, le Point Z doit être différent du Point S. Partant, s'il arrive que le Centre de Gravité des Points A, B'', C, coïncide avec le Point S; la Droite SZ étant ſuſceptible d'une direction quelconque, le Lieu cherché peut auſſi avoir une direction quelconque; & partant, tous les Points du Plan des Droites données de poſition jouiſſent à l'égard de ces Droites d'une même propriété.

Or, deux des Points A, B'', C, étant ſitués d'un même Côté d'une Droite paſſant par S; le Point reſtant eſt ſitué de l'autre Côté de la même Droite; & le Point S étant le Centre de Gravité de ces Points, la Somme des Perpendiculaires abaiſſées ſur cette Droite des deux Points ſitués d'un Côté d'elle, eſt égale à la Perpendiculaire

abaissée du Point restant. Par conséquent, la différence de la Somme des deux premières Perpendiculaires & de la dernière est zéro. Donc aussi, dans ce Cas, l'Espace Q est déterminé à être zéro. On a donc, $SA \times YA' + SC \times YC' = SB \times YB'$; quel que soit le Point Y situé dans l'Angle ASC'', duquel on abaisse les Perpendiculaires; & la même Conclusion s'applique aux positions du Point Y dans les autres Angles.

Ce Cas differe donc à trois égards des Cas précédens. 1°. Par la possibilité que le Lieu cherché soit dans chacune des Régions du Plan dans lesquelles il est divisé par les Droites données de position; 2°. & 3°. par la possibilité de l'indétermination de ce Lieu, qui entraîne une Valeur déterminée de l'Espace Q; savoir, son évanouïssance.

Quatrième Cas de la première Position du Point Y. $\begin{matrix} YA', & YB', & YC'. \\ - & + & + \end{matrix}$

L'Analyse, la Construction & la Démonstration sont les mêmes que dans le premier Cas; en substituant au Point A le Point A'', pris de manière que $SA'' = SA$. Le Lieu est déterminé.

Lieux du Point Z.	Lieux du Point Y.	Signes des Perpendiculaires.		
		YA'	YB'	YC'
$A''SC$	$C''SA$	$-$	$+$	$+$
	ASB	$+$	$+$	$+$
	BSC	$+$	$-$	$+$
	CSA''	$+$	$-$	$-$
BSC	$B''SC''$	$-$	$+$	$-$
	$C''SA$	$-$	$+$	$+$
	ASB	$+$	$+$	$-$
	BSC	$+$	$-$	$+$

Seconde Position du Point Y. Ce Point est regardé comme étant dans l'Angle ASB.

Subdivision. On réduit, comme dans la première Position, l'Examen de tous les Cas, à celui des quatre Variations suivantes des signes des Perpendiculaires

YA',	YB',	YC'.
$+$	$+$	$+$
$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$+$
$-$	$+$	$+$

Premier Cas de la seconde Position du Point Y. $\begin{matrix} YA' & YB' & YC' \\ + & + & + \end{matrix}$

Ce Cas est lié avec le quatrième de la première Position; & le Point Z est le Centre de Gravité des Points A'', B, C.

Second Cas de la seconde Position du Point Y. $\underset{+}{YA'}$, $\underset{+}{YB'}$, $\underset{-}{YC'}$,

Aux Points A & C soient substitués les Points A'' & C''. Le Point Z est le Centre de Gravité des Points A'', B, C''. Ce Cas est susceptible d'indétermination ; de la même manière que le troisième Cas de la première Position.

Troisième Cas de la seconde Position du Point Y. $\underset{+}{YA'}$, $\underset{-}{YB'}$, $\underset{+}{YC'}$,

Substituant aux Points A & B, les Points A'', B''; le Point Z est le Centre de Gravité des Points A'', B'', C ; & le lieu est déterminé.

Quatrième Cas de la seconde Position du Point Y. $\underset{-}{YA'}$, $\underset{+}{YB'}$, $\underset{+}{YCG}$,

Ce Cas rentre dans le premier Cas de la première Position ; & le Point Z est le Centre de Gravité des Points A, B, C.

Remarque. La Somme (prise dans le sens général) des Rectangles des Perpendiculaires abaissées d'un Point Y pris sur le Plan des Droites AA'', BB'', CC'', qui se coupent en un même Point S, par des Droites données de grandeur SA, SB, SC ; étant triple du Rectangle de la Droite SZ par la Distance du Point Y à la Droite SZ. Cette Somme est proportionnelle à cette Distance ; & partant, on obtient la Proposition suivante ; du genre de celles que les Anciens ont appelées *Porismes*. Trois Droites menées d'un même Point étant données de position sur un Plan, & trois Droites étant données de grandeur ; on peut trouver en même tems, la position d'une quatrième Droite & la grandeur d'une quatrième Droite, telles; que la Somme des Rectangles des Perpendiculaires abaissées (suivant une Direction déterminée) d'un même Point, sur les Droites données de position, par les Droites données de grandeur, soit égale au Rectangle de la Distance de ce Point à la Droite trouvée de position par la Droite trouvée de grandeur. Mais si les Droites données de position & les Droites données de grandeur, sont telles ; que la quatrième Droite à trouver de grandeur évanouïsse ; la position de la quatrième Droite à trouver est indéterminée, ou peut-être quelconque ; & la Somme des Rectangles des Perpendiculaires menées dans les Directions assignées, par les Droites données de grandeur, est déterminée à évanouïr.

§. c. Il est aisé d'appliquer le Calcul au Procédé que je viens de suivre ; & de déterminer les Angles sous lesquels le Lieu proposé coupe les Droites données de Position. Je prendrai pour Exemple le premier Cas de la première Position du Point Y; en supposant le Point Z dans l'Angle ASB. On a

$$SA \sin. ASZ = SB \sin. BSZ + SC \sin. CSZ$$
$$= SB \sin.(ASB - ASZ) + SC \sin.(ASC - ASZ)$$

De-là, $\begin{matrix} SA \\ \text{fin. } ASZ \times SB \text{ cof. } ASB \\ SC \text{ cof. } ASC \end{matrix} = \begin{matrix} \text{cof. } ASZ \times SB \text{ fin. } ASB \\ SC \text{ fin. } ASC \end{matrix}$

Donc, $\text{Tang. } ASZ = \frac{SB \text{ fin. } ASB + SC \text{ fin. } ASC}{SA + SB \text{ cof. } ASB + SC \text{ cof. } ASC}$.

$\text{Tang. } BSZ = \frac{SA \text{ fin. } ASB \quad - SC \text{ fin. } BSC}{SA \text{ cof. } ASB + SB \quad + SC \text{ cof. } ASC}$.

$\text{Tang. } CSZ = \frac{SA \text{ fin. } ASC + SB \text{ fin. } BSC}{SA \text{ cof. } ASC + SB \text{ cof. } BSC + SC}$.

Remarque. Ces Formules renferment toutes les Positions du Point Z; favoir, le Point Z eft $\begin{matrix} \text{dans l'Angle } ASB \\ \text{fur } SB \\ \text{dans l'Angle } BSC \end{matrix}$ fuivant que $SA \text{ fin. } ASB \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} SC \text{ fin. } BSC$.

Item; changeant les fignes des Quantités SA, SB, SC, d'une manière correfpondante aux changemens de Directions des Perpendiculaires; on obtient encore tous les Cas dont j'ai fait l'énumération.

Exemple. Que les Perpendiculaires à SB foient regardées comme fouftractives. On obtient, $\text{Tang. } ASZ = \frac{-SB \text{ fin. } ASB + SC \text{ fin. } ASC}{SA - SB \text{ cof. } ASB + SC \text{ cof. } ASB}$; ce qui répond au troifième Cas de la première Pofition du Point Y.

Si on a en même tems; $SB \text{ fin. } ASB = SC \text{ fin. } ASC$; & $SA + SC \text{ cof. } ASB = SB \text{ cof. } ASB$; les deux Termes de la Fraction qui exprime la valeur de *Tang.* ASZ évanouïffent en même tems; donc, cette Tangente eft indéterminée; donc, le Lieu des Points Y eft indéterminé.

Ayant déterminé la Direction du Lieu cherché; pour en calculer la Pofition, il faut calculer la grandeur de la Ligne SZ; on a (§. XXXVII);

$9SZ^2 = \left(\begin{matrix} SB \text{ fin. } ASB \\ SC \text{ fin. } ASC \end{matrix}\right)^2 + \left(\begin{matrix} SA \\ SB \text{ cof. } ASB \\ SC \text{ cof. } ASC \end{matrix}\right)^2$; de-là, connoiffant la grandeur de l'Efpace donné Q; on connoît la diftance du Lieu cherché à SZ.

§. *d.* On peut auffi rechercher immédiatement par le calcul la Pofition du lieu cherché.

On a, $YA' = SY \text{ fin. } YSA$

$YB' = SY \text{ fin. } YSA + ASB$

$YC' = SY \text{ fin. } YSA + ASC$.

Donc, $\begin{matrix} SA \times YA' \\ + SB \times YB' \\ + SC \times YC' \end{matrix} = SY \text{ fin. } YSA \times \begin{matrix} SA \\ SB \text{ cof. } ASB \\ SC \text{ cof. } ASC \end{matrix} + SY \text{ cof. } YSA \times \begin{matrix} SB \text{ cof. } ASB \\ SC \text{ cof. } ASC \end{matrix}$

$= YA' \times \begin{matrix} SA \\ SB \text{ cof. } ASB \\ SC \text{ cof. } ASC \end{matrix} + SA' \times \begin{matrix} SB \text{ cof. } ASB \\ SC \text{ cof. } ASC. \end{matrix}$

Partant,

Partant, la Queſtion propoſée ſur trois Droites données de poſition, eſt réduite à la Queſtion bien plus ſimple de deux Droites perpendiculaires l'une à l'autre, ſur leſquelles abaiſſant des Perpendiculaires, la ſomme de leurs Rectangles par des Droites données eſt donnée de grandeur.

Scholie. Les détails dans leſquels je viens d'entrer dans le développement de cet Exemple, me paroiſſent ſuffire, pour faciliter l'intelligence du développement de la Propoſition générale.

§. *e.* *Procédé général.* Soient SA, SB, SC, SD - - - - SL, SM, SN, un nombre n de Droites menées d'un même Point S; de manière que les Angles ASB, ASC, ASD - - - - ASL, ASM, ASN, aillent ſucceſſivement en croiſſant; le plus grand d'entr'eux ASN étant plus petit que deux Droits. On demande le Lieu des Points Y, de chacun deſquels abaiſſant ſur les Droites données les Perpendiculaires YA', YB', YC', YD' - - - YL', YM', YN'; la ſomme ou la différence de leurs Rectangles par des Droites données ſoit égale à un Eſpace Q donné de grandeur.

Soient $\frac{SA}{SA''}$, $\frac{SB}{SB''}$, $\frac{SC}{SC''}$, $\frac{SD}{SD''}$ - - - $\frac{SL}{SL''}$, $\frac{SM}{SM''}$, $\frac{SN}{SN''}$; des Droites reſpectivement égales aux Droites données de grandeur, portées ſur les Droites données de poſition de part & d'autre du Point S.

1°. Soient regardées comme poſitives les Perpendiculaires abaiſſées des Points Y ſitués dans l'Angle ASN''. Soit conçue menée SY; & ſoient conçues abaiſſées les Perpendiculaires Aa, Bb, Cc, Dd, - - - Ll, Mm, Nn, ſur SY.

Les Triangles YSA', YSB', YSC', YSD', - - - - YSL', YSM', YSN', ſont reſpectivement ſemblables aux Triangles . . . . ASa, BSb, CSc, DSd, - - - - LSl, MSm, NSn.

Donc, les Rectangles . . . . $SA \times YA'$, $SB \times YB'$, $SC \times YC'$, $SD \times YD'$ - - - - $SL \times YL'$, $SM \times YM'$, $SN \times YN'$, ſont reſpectivement égaux aux Rectangles . . . . $SY \times Aa$, $SY \times Bb$, $SY \times Cc$, $SY \times Dd$, - - - - $SY \times Ll$, $SY \times Mm$, $SY \times Nn$.

Donc, la ſomme des premiers Rectangles; c'eſt-à-dire, l'Eſpace donné Q, eſt égale au Rectangle de SY par la ſomme des Droites . . . . Aa, Bb, Cc, Dd, - - - - Ll, Mm, Nn.

Soit Z le Centre commun de Gravité des Points A, B, C, D, - - - L, M, N; ſoit $Z\mathfrak{z}$ perpendiculaire à SY, & YZ' perpendiculaire à SZ. On obtient (§. XXXVIII) $Aa + Bb + Cc + Dd + \cdots Ll + Mm + Nn = n \times Z\mathfrak{z}$. Donc, $Q = n \times SY \times Z\mathfrak{z}$; ou, $\frac{1}{n} Q = SY \times Z\mathfrak{z}$. Mais les Triangles YSZ', $ZS\mathfrak{z}$, ſont ſemblables; donc, $SY \times Z\mathfrak{z} = SZ \times YZ'$; donc $\frac{1}{n} Q = SZ \times YZ'$. Donc, le Rectangle $SZ \times YZ'$ eſt

donné de grandeur ; mais la Droite SZ eſt donnée de grandeur ; donc, la Droite YZ' eſt auſſi donnée de grandeur ; mais elle eſt perpendiculaire à la Droite SZ donnée de poſition ; donc, le Point Y eſt à une Droite donnée de poſition parallèle à SZ.

Conſtr. Soit cherché le Centre de Gravité Z des Points $A, B, C, D, --- L, M, N$; ſoit menée SZ. Soit changé l'Eſpace Q donné de grandeur, en un Rectangle qui ait pour un de ſes Côtés la Droite SZ priſe autant de fois qu'il y a de Droites données de poſition ; d'un Point quelconque de SZ ſoit élevée à elle une Perpendiculaire égale à l'autre Côté. Par l'extrêmité de cette Perpendiculaire ſoit menée à SZ une Parallèle ; elle ſera le Lieu des Points cherchés.

La *Démonſtration* découle ſi évidemment de l'Analyſe, que je crois ſuperflu de la développer ; ſur-tout après l'avoir fait pour le premier Exemple d'une manière ſi détaillée.

Remarque première. Les Points A, B, C, D - - - L, M, N, dont Z eſt le Centre de Gravité ; étant ſuppoſés dans l'Angle ASN ou ſur les Jambes de cet Angle plus petit que deux Droits : ce Centre de Gravité eſt auſſi dans l'Angle ASN. Sa ſituation dans les uns ou les autres des Angles plus petits que ASN, dépend des Poſitions des Points A, B, C, D, - - - L, M, N ; ou des Grandeurs des Droites données. Mais le Lieu des Points Y eſt parallèle à SZ ; donc auſſi les poſitions des parties de ce Lieu dans les Angles formés par les Droites données de poſition, dépendent des Grandeurs des mêmes Droites. Et la variation des ſignes des Perpendiculaires abaiſſées des Points Y ſitués dans ces Parties, dépend des changemens de leurs directions rélativement à celles qu'on regarde originairement comme poſitives. Il me ſuffira d'en donner ces deux Exemples.

Angles dans leſquels eſt Z.	Angles dans leſquels eſt Y.	Signes des Perpendiculaires YA',	YB'	YC',	YD'	. . .	YL',	YM',	YN'
ASB . . :	BSA : : :	−	+	+	+	. . .	+	+	+
	ASN'' . . .	+	+	+	+	. . .	+	+	+
	$N''SM''$ . . .	+	+	+	+	. . .	+	+	−
	$M''SL''$ . . .	+	+	+	+	. . .	+	−	−
	⋮	⋮							
	$D''SC''$: : :	+	+	+	−	: . :	−	−	−
	$C''SB''$ . . .	+	+	−	−	. . .	−	−	−
	$B''SA''$ . . .	+	−	−	−	. . .	−	−	−
BSC : : :	CSB : . .	−	−	+	+	. . :	+	+	+
	BSA . . .	−	+	+	+	. . .	+	+	+
	ASN'' . . .	+	+	+	+	. . .	+	+	+
	$N''SM''$ . . .	+	+	+	+	. . .	+	+	−
	$M''SL''$ . . .	+	+	+	+	. . .	+	−	−
	⋮	⋮							
	$D''SC''$ . . .	+	+	+	−	. . .	−	−	−
	$C''SB''$ . . .	+	+	−	−	: . .	−	−	−

Ces Exemples ſuffiſent pour montrer : Qu'on ne peut réſoudre le Cas propoſé de la ſomme, dans le ſens propre de l'Enoncé ; ſans réſoudre en même tems ceux des différences étroitement liés avec lui ; que, par conſéquent, on ne doit pas prendre la première Expreſſion dans un ſens trop limité ; & qu'il eſt toujours néceſſaire d'avoir égard à la direction ſuivant laquelle chaque Perpendiculaire eſt regardée comme poſitive ou négative ; & ſi une ou quelques-unes d'elles doivent être priſes dans une direction oppoſée, on doit changer le ſigne qui les précède.

Je ne puis, ſans m'expoſer à trop de longueur, pourſuivre toutes les ſuppoſitions qu'on peut faire ſur les directions des Perpendiculaires qu'on regarde comme poſitives ou négatives. Je me contenterai d'en expoſer un ſeul Cas. Que le Point Y étant ſitué dans l'Angle ASN'', les ſignes des Perpendiculaires . . . . YA', YB', YC', YD' - - - - YL', YM', YN', ſoient comme il ſuit + — — + + — +

Pour réſoudre ce Cas, on ſubſtituera aux Points B, C, M, les Points B'', C'', M'', reſpectivement. On cherchera le Centre commun de Gravité Z des Points A, B'', C'', D, - - - - L, M'', N. Le Lieu cherché (s'il eſt déterminé) eſt parallèle à SZ.

Comme, dans ce Cas, le Point Z eſt le Centre de Gravité de Points, tels : Que, ſi par S on mène une Droite quelconque, quelques-uns de ces Points étant ſitués d'un côté de cette Droite, les autres ſont ſitués du côté oppoſé ; le Point Z n'eſt pas déterminé par les Poſitions des Droites données, à être dans une Région déterminée de ce Plan ; mais il peut être placé dans toutes les Régions dans leſquelles ce Plan eſt partagé par ces Droites ; ſa Poſition dans ces Régions dépendant des Grandeurs des Droites données.

En particulier, ſi le Point S & le Point Z coïncident, la Droite SZ pouvant avoir une Poſition quelconque, le Lieu propoſé eſt indéterminé ; & au contraire, l'Eſpace Q eſt déterminé à évanouïr. Savoir, la ſomme des Rectangles répondans aux Perpendiculaires regardées comme poſitives, eſt égale à la ſomme des Rectangles répondans aux Perpendiculaires négatives. En effet, le Point S étant le Centre de Gravité des Points A, B'', C'', D, - - - - L, M'', N ; ſi de ce Point on mène une Droite à un Point quelconque Y du Plan ſur lequel ils ſont ſitués ; la ſomme des Perpendiculaires abaiſſées ſur cette Droite depuis ceux de ces Points qui ſont ſitués d'un côté d'elle, eſt égale à la ſomme des Perpendiculaires abaiſſées ſur elle depuis les Points ſitués de l'autre côté ; donc, la différence de ces deux ſommes eſt zéro. Donc auſſi le Rectangle de SY par cette différence eſt zéro. Mais ce Rectangle eſt égal à la différence de la ſomme des Rectangles regardés

comme positifs, & de la somme de ceux qu'on regarde comme négatifs, des Perpendiculaires abaissées sur les Droites données de position par les Droites données de grandeur. Donc, cette dernière différence est zéro.

Remarque. La substitution des Points A'', B'', C'', D'' - - - - L'', M'', N''
aux Points A, B, C, D - - - - L, M, N;
indiquée par le changement de direction des Perpendiculaires (abaissées sur les Droites données de position) qu'on regardoit comme positives; est le Principe qui embrasse tous les Cas de Sommes & de Différences. Savoir, les Droites . . . . SA'', SB'', SC'', SD'' --- SL'', SM'', SN'', étant respectivement égales aux Droites SA, SB, SC, SD --- SL, SM, SN; mais menées dans un sens opposé, les Rectangles des Perpendiculaires abaissées sur les Droites AA'', BB'', CC'', DD'', - - - - LL'', MM'', NN'' par les Droites SA, SB, SC, SD -- SL, SM, SN; répondent aux Rectangles de ces Perpendiculaires par les Droites . . . . SA'', SB'', SC'', SD'' -- SL'', SM'', SN'', précédés du signe opposé. Partant, les différens Cas qu'on peut proposer sur les variations de signes de ces Perpendiculaires, se réduisent tous à une seule & même Construction; & ils ne different que par le sens suivant lequel on porte les Droites données de grandeur sur les Droites données de position.

§. *f.* Le Lieu des Points Y étant parallèle à la Droite SZ; les Angles sous lesquels ce Lieu coupe les Droites données de position sont respectivement les mêmes que les Angles sous lesquels la Droite SZ coupe les mêmes Droites. Or, les Angles que la Droite SZ fait avec les Droites données de Position, sont déterminés par l'Equation

$$SA\ \text{sin.}\ ASZ + SB\ \text{sin.}\ BSZ + SC\ \text{sin.}\ CSZ + SD\ \text{sin.}\ DSZ + \cdots$$
$$\cdots SL\ \text{sin.}\ LSZ + SM\ \text{sin.}\ MSZ + SN\ \text{sin.}\ NSZ = 0.$$

De laquelle on tire;

$$\text{Tang.}\ ASZ = \frac{SB\ \text{sin.}\ ASB + SC\ \text{sin.}\ ASC + SD\ \text{sin.}\ ASD + \ldots}{SA + SB\ \text{cos.}\ ASB + SC\ \text{cos.}\ ASC + SD\ \text{cos.}\ ASD + \ldots}$$
$$\frac{\ldots SL\ \text{sin.}\ ASL + SM\ \text{sin.}\ ASM + SN\ \text{sin.}\ ASN}{\ldots SL\ \text{cos.}\ ASL + SM\ \text{cos.}\ ASM + SN\ \text{cos.}\ ASN}$$

Donc, on connoît l'Angle sous lequel la Droite SZ coupe l'une quelconque des Droites données de position; donc aussi on connoît l'Angle sous lequel le Lieu cherché coupe l'une quelconque des mêmes Droites.

Le Quarré de la Droite SZ prise autant de fois qu'il y a de Droites données de position; est égal à la somme des Quarrés des deux Termes de la Fraction qui exprime la Tangente de ASZ.

Changeant les signes de celles des Lignes SA, SB, SC, SD --- SL, SM, SN, qu'on regarde comme négatives, cette Expression devient générale par tous les Cas de

de Somme & de Différences. En particulier, si les deux Termes de la Fraction qui exprime la valeur de *Tang.* ASZ évanouïssent en même tems; SZ évanouït; cette Fraction a une valeur indéterminée, & partant aussi l'Angle ASZ est indéterminé: L'Espace Q évanouït aussi, & tous les Points du Plan sur lequel sont les Droites données jouïssent de la même propriété rélativement à ces Droites.

§. *g.* La Position & la Grandeur de la Droite SZ ne dépendent que des Positions & des Grandeurs des Droites SA, SB, SC, SD - - - SL, SM, SN; & la Grandeur de la Somme (prise dans le sens général) des Rectangles des Perpendiculaires abaissées d'un Point Y sur les Droites données de position par les Droites données de grandeur, est égale au Rectangle de la Perpendiculaire abaissée du Point Y sur SZ, par la Droite SZ prise autant de fois qu'il y a de Droites données de position. De-là on obtient le *Porisme* général suivant. Un nombre quelconque de Droites partant d'un même Point, étant données de position sur un Plan, & un pareil nombre de Droites étant données de grandeur; on peut trouver en même tems une Droite de plus de position, & une Droite de plus de grandeur; telles, que la Somme (prise dans le sens général) des Rectangles des Perpendiculaires abaissées d'un Point quelconque de ce Plan sur les Droites données de position, par les Droites données de grandeur, soit égale au Rectangle de la Perpendiculaire abaissée du même Point sur la Droite trouvée de position, par la Droite trouvée de grandeur. Excepté un seul cas; où la Droite à trouver de grandeur évanouït; & la Position de l'autre Droite est indéterminée.

§. *h.* Au lieu de regarder les Droites SA, SB, SC, SD - - - - SL, SM, SN, comme étant toutes situées d'un même côté de la Droite SA; en sorte que l'Angle ASN, le plus grand de ceux qui sont formés par ces Droites, soit plus petit que deux Droits: On peut regarder ce plus grand Angle comme s'étendant au-delà de deux Droits; de manière que les Angles ASB, ASC, ASD - - - - ASL, ASM, ASN, aillent successivement en croissant; le plus grand d'entr'eux ASN n'ayant d'autre Limite en grandeur que quatre Angles droits.

Dans cette supposition, s'il arrive que les Droites SA, SB, SC, SD --- SL, SM, SN, soient respectivement égales & parallèles aux Côtés NA, AB, BC, CD --- IL, LM, MN, d'une Figure rectiligne $NABCD$ - - - LMN; on obtient cette propriété neuve & remarquable des Figures rectilignes (qui trouvera bientôt une application importante) c'est que le Point S est le Centre commun de Gravité des Points A, B, C, D --- L, M, N.

En effet, les Valeurs des Angles ASB sont respectivement A

$$\begin{array}{ll} ASB & A \\ ASC & A+B \\ ASD & A+B+C \\ \vdots & \vdots \\ ASM & A+B+C+ \cdots L \\ ASN & A+B+C+ \cdots M. \end{array}$$

Des Points B, C, D, ---- M, N, abaissant sur SA les Perpendiculaires Bb, Cc, Dd, ---- Mm, Nn; on a les Equations suivantes

$$\begin{array}{ll} SA = NA & \\ Sb = AB\ cos.A & Bb = AB\ sin.A \\ Sc = BC\ cos.A+B & Cc = BC\ sin.A+B \\ Sd = CD\ cos.A+B+C & Dd = CD\ sin.A+B+C \\ \vdots & \vdots \\ Sm = LM\ cos.A+B+C \cdots L & Mm = LM\ sin.A+B+C+ \cdots L \\ Sn = MN\ cos.A+B+C+ \cdots M & Nn = MN\ sin.A+B+C+ \cdots M. \end{array}$$

Mais (§§. XIX & XV) les Sommes des seconds Membres de chacune de ces Equations sont zéro ; donc, les Sommes des deux premiers Membres sont aussi zéro : Donc (§. XXXVIII) ; tant la Droite SA que la Perpendiculaire à la même Droite élevée du Point S, passent par le Centre de Gravité des Points $A, B, C, D, \cdots L, M, N$. Donc, le Point S est ce Centre de Gravité.

On a donc ce *Théorême* sur les Figures rectilignes. D'un Point pris sur le Plan d'une Figure rectiligne soient menées des Droites égales & parallèles à tous ses Côtés (en tournant toujours dans un même sens) ; le Point depuis lequel ces Droites sont menées est le Centre commun de Gravité de leurs Extrêmités.

Je pourrois donner une autre Démonstration (immédiate & géométrique) de cette élégante Proposition ; mais je craindrois de distraire trop long-tems le Lecteur du but principal de cette Dissertation.

§. *i*. Le procédé géométrique que j'ai suivi dans la recherche du Lieu proposé, me paroît le plus lumineux de ceux qu'on peut suivre. Cependant on peut aussi employer une Analyse purement algébrique ; comme il suit :

Soient désignées par a, b, c, d, ------- m, n; les Droites données de Grandeur, dont on doit prendre les Rectangles par les Perpendiculaires . . . . YA', YB', YC', YD', ------- YM', YN', abaissées sur les Droites . . . . SA, SB, SC, SD, ------- SM, SN.

Les Expreſſions des Perpendiculaires	ſont reſpectivement	ou
YA'	$SY\ \sin.YSA$	$SY\ \sin.YSA$
YB'	$\sin.YSB$	$\sin.\overline{YSA+ASB}$
YC'	$\sin.YSC$	$\sin.\overline{YSA+ASC}$
YD'	$\sin.YSD$	$\sin.\overline{YSA+ASD}$
⋮	⋮	⋮
YM'	$\sin.YSM$	$\sin.\overline{YSA+ASM}$
YN'	$\sin.YSN$	$\sin.\overline{YSA+ASN}$

Donc, préſentant les Sinus de ces Sommes dans les Sinus & Coſinus de leurs Parties, & multipliant par les Droites données, on a l'Equation

$$\left.\begin{array}{l} SY\sin.YSA(a+b\cos.ASB+c\cos.ASC+d\cos.ASD+\cdots m\cos.ASM+n\cos.ASN) \\ +SY\cos.YSA(\quad b\sin.ASB+c\sin.ASC+d\sin.ASD+\cdots m\sin.ASM+n\sin.ASN) \end{array}\right\} = Q$$

$$\text{Ou},\ \left.\begin{array}{l} YA'(a+b\cos.ASB+c\cos.ASC+d\cos.ASD+\cdots m\cos.ASM+n\cos.ASN) \\ +SY'(\quad b\sin.ASB+c\sin.ASC+d\sin.ASD+\cdots m\sin.ASM+n\sin.ASN) \end{array}\right\} = Q.$$

Savoir; deux Droites perpendiculaires l'une à l'autre étant données de poſition, on demande le Lieu des Points de chacun deſquels abaiſſant ſur ces deux Droites des Perpendiculaires, la ſomme de leurs Rectangles par des Droites données de grandeur ſoit donnée de grandeur; en ſorte que la Queſtion propoſée pour un nombre quelconque de Droites, eſt toujours réduite au Cas de deux Droites ſeulement perpendiculaires l'une à l'autre. Il eſt aiſé de pourſuivre l'Accord de ce Procédé avec celui que j'ai ſuivi précédemment (§. *e.*); j'en abandonne le ſoin à ceux des jeunes Géomètres qui voudront en prendre la peine. Cette ſolution algébrique trouvera peut-être un plus grand nombre de Partiſans que le Procédé géométrique, dans un ſiècle où l'on cultive preſque excluſivement les ſciences de calculs. Quant à moi; dans le plus grand nombre des Cas où il eſt poſſible d'employer des Procédés géométriques, ils me paroiſſent ſi lumineux & ſi propres à former l'eſprit à la méditation, que c'eſt avec la plus grande peine que je vois des jeunes gens, connoiſſant à peine les premiers Elémens de Géométrie, abandonner entiérement les méthodes anciennes, pour ſe plonger prématurément & excluſivement dans celles des Modernes.

§. *k.* Si dans un ſujet purement élémentaire, il étoit permis d'employer les premiers principes des calculs ſupérieurs; on pourroit aiſément trouver, preſque immédiatement, que le Lieu cherché eſt une Ligne droite.

Soient Y & Y' deux Points du Lieu cherché voiſins l'un de l'autre. Les Sommes des Rectangles répondans aux Points Y & Y' ſont donc égales entr'elles: Donc, la différence de ces deux Sommes eſt zéro. Du Point Y' ſoient abaiſſées des Perpendiculaires ſur celles qui ſont menées du Point Y; & ſoient déſignés en général



par y les Piés de ces Perpendiculaires. Soient désignés en général par T les Angles que les Tangentes au Lieu cherché font avec les Droites données de position. On aura l'Equation, $\int. a \times Y y = 0$; donc aussi $\int. a \frac{Yy}{YY'} = 0$; & $\int. a \times \text{Lim.} \frac{Yy}{YY'} = 0$. Mais $\text{Lim.} \frac{Yy}{YY'} = \text{fin. } T$. Donc, $\int. a \text{ fin. } T = 0$. Donc, toutes les Tangentes au Lieu cherché sont parallèles entr'elles; donc, le Lieu cherché est une Ligne droite.

Remarque. L'Equation $\int. a \text{ fin.} T = 0$; indique la Propriété (§. *e.*), que le Lieu cherché est parallèle à la Droite qui joint le sommet S, avec le Centre commun de Gravité des Extrêmités des Droites égales aux Droites données de grandeur, portées depuis S sur les Droites données de position.

Je ne prétends point recommander ce Procédé, sur-tout aux jeunes Géomètres, au préjudice de ceux qui ne sont fondés que sur des Principes purement élémentaires. Cependant, qu'il me soit permis de reconnoître que le Passage des Elémens aux Calculs appelés *supérieurs*, peut être tellement ménagé, que ces derniers deviennent des Conséquences immédiates des Propositions les plus élémentaires. J'espère le montrer un jour d'une manière plus rigoureuse encore que je ne l'ai fait dans mon *Exposition des Principes des Calculs supérieurs*, couronnée par l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse.

Après m'être si fort étendu sur le premier Cas de la Question proposée, dans lequel les Droites données de position partent d'un même Point, je passe au second Cas dans lequel ces Droites ne partent pas d'un même Point. Et je vais montrer que ce second Cas est toujours réduit au premier, énoncé dans toute sa généralité.

SECOND CAS.

Les Droites données de position ne partent pas d'un même Point.

§. *I.* Soient des Droites en nombre quelconque données de position sur un Plan; & soient des Droites en même nombre données de grandeur. C'est une Droite qui est le Lieu (s'il est déterminé) de tous les Points sur le même Plan, de chacun desquels abaissant des Perpendiculaires sur les Droites données de position, la somme (prise dans le sens général) des Rectangles de ces Perpendiculaires par les Droites données de grandeur, soit donnée de grandeur.

En effet, par un Point quelconque pris sur le Plan des Droites données de position, soient menées des Parallèles à toutes ces Droites. Les Perpendiculaires abaissées d'un Point quelconque de ce Plan sur les Droites données de position, sont les sommes ou les différences des Perpendiculaires abaissées du même Point sur les Parallèles aux Droites

Droites données de poſition, & des Diſtances de ces dernières Droites à leurs Parallèles. Partant; ces Parallèles gardant des Diſtances conſtantes aux Droites données de poſition; la ſomme des Rectangles des Perpendiculaires abaiſſées ſur les Droites données de poſition par les Droites données de grandeur, differe d'une grandeur conſtante, de la ſomme des Rectangles des Droites données de grandeur, par les Perpendiculaires aux Droites qui ſont parallèles aux Droites données de poſition. Donc la première ſomme étant donnée de grandeur; la ſeconde ſomme eſt auſſi donnée de grandeur. Donc (premier Cas); le Lieu des Points cherchés (s'il eſt déterminé), eſt une Ligne droite.

Je vais éclaircir par un Exemple cette Expoſition générale.

§. m. *Exemple.* Soit ABC un Triangle: On demande le Lieu des Points Y de chacun deſquels abaiſſant des Perpendiculaires ſur ſes Côtés, la Somme ou les Différences de leurs Rectangles par des Droites données, ſoient données de grandeur. Fig. XVI.

Diviſion. Soient prolongés tous les Côtés de ce Triangle indéfiniment en $\begin{matrix} a, & b, & c, \\ a' & b' & c' \end{matrix}$.
Le Plan de ce Triangle eſt partagé dans les ſept Régions ABC; $\begin{matrix} aAa' & bBb' & cCc' \\ aABb', & bBCc', & cCAa'. \end{matrix}$

Mais comme les trois Régions aAa', bBb', cCc', jouent un même Rôle; & que les trois Régions $aABb'$, $bBCc'$, $cCAa'$, jouent auſſi un même Rôle, l'Examen de ces ſept Régions eſt réduit à l'Examen des trois Régions, ABC, aAa', $aABb'$.

Pour chacune de ces trois Régions il ſe préſente trois Cas à examiner. Ou bien, les trois Perpendiculaires ſont poſitives, ou deux ſont poſitives & une négative; ou bien une eſt poſitive & deux négatives; & ces deux derniers Chefs de Diviſion paroiſſent donner lieu chacun à une ſubdiviſion en trois Cas; il paroît donc d'abord qu'il y a 21 Cas à examiner. Mais ce nombre peut être conſidérablement diminué.

Quant à la Région ABC. Les trois Côtés du Triangle jouant le même Rôle, les deux derniers Cas où les Perpendiculaires ſont de ſignes différens, ne ſont pas ſuſceptibles de ſubdiviſions; & partant il n'y a que trois Cas à examiner pour cette Région: ſavoir, les Perpendiculaires poſitives ſont,

	trois
Région : ſavoir, les Perpendiculaires poſitives ſont,	deux.
	une

Quant à la Région aAa'. Le Cas où les trois Perpendiculaires ſont poſitives, eſt le même que celui rélatif à la Région ABC, dans lequel la Perpendiculaire à BC eſt poſitive, & celles à AB & AC ſont négatives. Une Perpendiculaire étant négative & les deux autres poſitives: ſi la Perpendiculaire à BC eſt négative; ce Cas n'eſt pas ſuſceptible de ſubdiviſion, & il eſt propre à cette Région; mais ſi la Perpendiculaire à AC, par exemple, eſt négative, ce Cas répond à celui de la Région ABC, dans

Z

lequel les Perpendiculaires à BC & AC sont positives, & la Perpendiculaire à AB négative. Enfin, une seule Perpendiculaire étant positive : Si la Perpendiculaire à BC est positive ; ce Cas répond à celui de la Région ABC dans lequel les trois Perpendiculaires sont positives ; & si la Perpendiculaire à AC est seule positive ; ce Cas répond à celui de la Région ABC, dans lequel la Perpendiculaire à AB est positive, & les deux autres négatives. Donc, la Région aAa', ne donne lieu qu'à un seul Cas différent de ceux de la Région ABC ; savoir, celui où la Perpendiculaire à BC est négative & les deux autres positives.

Quant à la Région $aABb'$. Le Cas où les trois Perpendiculaires sont positives, revient au Cas de la Région ABC dans lequel la Perpendiculaire à AB est négative & les deux autres positives. Qu'une Perpendiculaire soit négative & les deux autres positives : Si la Perpendiculaire à AB est négative, ce Cas revient à celui de la Région ABC où les trois Perpendiculaires sont positives : Si la Perpendiculaire à AC est seule négative ; ce Cas revient à celui de la Région ABC, dans lequel la Perpendiculaire à BC est seule positive. Enfin, qu'une Perpendiculaire seulement soit positive : Si la Perpendiculaire à AB est seule positive ; ce Cas revient à celui de la Région aAa' dans lequel la Perpendiculaire à BC est seule négative ; & si la Perpendiculaire à AC est seule positive, ce Cas revient à celui de la Région ABC où la Perpendiculaire à BC est seule négative.

Donc enfin, nous n'avons que quatre Cas différens à examiner : Que les Perpendiculaires abaissées sur AB, BC, CA, soient respectivement désignées par YA', YB', YC'.

Régions du Point Y.	Signes des Perpendiculaires.		
	YA',	YB',	YC'
ABC	+	+	+
	+	+	—
	+	—	—
aAa'	+	+	—

Par C soit menée à AB une Parallèle ; sur laquelle & sur les Droites CA, CB, soient portées de part & d'autre du Point C, les Droites $\frac{C\alpha}{C\alpha'}$, $\frac{C\beta}{C\beta'}$, $\frac{C\gamma}{C\gamma'}$; respectivement égales aux Droites données de grandeur, a, b, c.

Premier Cas. Région du Point Y ; ABC. $\underset{+}{YA'}$ $\underset{+}{YB'}$ $\underset{+}{YC'}$.

Que YA' rencontre en A'' la Droite $\alpha\alpha'$.

$$YA' = AC\,\text{sin}.A - YA''.$$

Donc, $a(AC\,\text{sin}.A - YA'') + b \times YB' + c \times YC' = Q.$

Donc, $-a \times YA'' + b \times YB' + c \times YC' = Q - a \times AC\,\text{sin}.A.$

Donc, le Point Z eſt le Centre de Gravité des Points α, β, γ; & le Lieu cherché eſt parallèle à CZ.

Remarque. Le Point Z peut ſe trouver dans chacune des Régions dans leſquelles les Droites αC, βC, γC, partagent le Plan du Triangle ABC; & partant, les Points Y peuvent être ſitués auſſi dans toutes ces Régions; & l'Eſpace Q eſt égal à la Somme ou à des Différences des Rectangles propoſés, ſuivant que Y eſt dans le Triangle ABC ou hors de ce Triangle. En particulier, ſi $Q = a \times AC\, ſin.A$; la Ligne CZ elle-même eſt le Lieu cherché.

Le Lieu des Points Y eſt indéterminé, ſi le Point C eſt le Centre commun de Gravité des Points α, β, γ; ce qui a lieu (§. *h.*) lorſque les Droites $C\alpha$, $C\beta$, $C\gamma$, ſont entr'elles comme les Côtés AB, BC, CA, du Triangle propoſé; & dans ce Cas, l'Eſpace Q eſt déterminé à être $a \times AC\, ſin.A$; ce qui s'accorde avec le §. XXIV.

Second Cas. Région du Point Y, ABC. $\overset{YA',}{+}\ \overset{YB',}{+}\ \overset{YC'}{-}$

$$a \times YA' + b \times YB' - c \times YC' = a(CA\, ſin.A - YA'') + b \times YB' - c \times YC')$$

Donc, $-a \times YA'' + b \times YB' - c \times YC' = Q - a \times CA\, ſin.A.$
Ou, $a \times YA'' - b \times YB' + c \times YC' = a \times CA\, ſin.A - Q.$ ſuivant que $Q \gtrless a \times CA\, ſin.A.$

Partant, le Point Z eſt le Centre de Gravité des Points α, β, γ'; & le Lieu des Points Y, parallèle à CZ, eſt déterminé.

Troiſième Cas. Region du Point Y; ABC. $\overset{YA',}{+}\ \overset{YB',}{-}\ \overset{YC'}{-}$

$$a \times YA' - b \times YB' - c \times YC' = a \times CA\, ſin.A - (a \times YA'' + b \times YB' + c \times YC').$$

Donc, $a \times YA'' + b \times YB' + c \times YC' = a \times CA\, ſin.A - Q.$

Partant; Z eſt le Centre de Gravité des Points α, β', γ; & le Lieu des Points Y parallèle à CZ eſt déterminé.

Quatrième Cas. Région du Point Y, aAa'; $\overset{YA',}{+}\ \overset{YB',}{+}\ \overset{YC'}{-}$

$$YA' = YA'' - CA\, ſin.A.$$

Donc, $a \times YA'' + b \times YB' - c \times YC' = Q + a \times CA\, ſin.A.$

Donc, Z eſt le Centre commun de Gravité des Points α, β', γ'; & le Lieu des Points Y, parallèle à CZ, eſt déterminé.

§. *n.* *Remarque.* Je ne m'arrête pas à pourſuivre toutes les Poſitions du Point Z; & les Poſitions correſpondantes du Point Y dans les Régions dans leſquelles le Plan du Triangle eſt diviſé par ſes Côtés & leurs Prolongemens; en tant qu'elles dépendent de la grandeur de l'eſpace donné, & de la Poſition du Point Z. L'examen de toutes ces Poſitions ne peut avoir aucune difficulté que celle de la longueur. Je crois que cet exemple tiré du Triangle peut ſuffire pour montrer comment on doit faire l'énumération

de tous les Cas qu'on peut propoſer ; diminuer le nombre de ces Cas ; & réduire le ſecond Cas au premier. Savoir ; par un des Points de Section des Droites données de Poſition, ſoient menées à toutes les Droites reſtantes des Parallèles ; de ce Point ſoient portées de part & d'autre ſur toutes les Droites dont il eſt le Point de Section des Droites reſpectivement égales aux Droites données de grandeur. La Conſtruction eſt toujours réduite à chercher le Centre commun de gravité des Extrêmités des Droites portées (ſur différentes de ces Droites) ; & le Lieu cherché (s'il eſt déterminé) eſt parallèle à la droite qui joint le premier Point avec ce Centre commun de gravité. La diſtance de ce Lieu à cette dernière Droite ; & ſa ſituation d'un Côté ou de l'autre d'elle, dépendent de la grandeur de l'eſpace donné, & des Poſitions & Diſtances mutuelles des Droites données de poſition.

On obtient pour ce ſecond Cas un *Poriſme* entiérement analogue à celui qui eſt rélatif au premier Cas ; ſavoir. Un nombre quelconque de Droites étant données de poſition ſur un Plan ; & un même nombre de Droites étant données de grandeur : On peut trouver en même tems une Droite de grandeur, & une Droite de poſition ; telles que, ſi d'un Point de ce Plan on abaiſſe ſur les Droites données de poſition des Perpendiculaires ; la ſomme de leurs Rectangles (en ayant égard à une direction déterminée des Perpendiculaires regardées comme poſitives) par les Droites données de grandeur, ſoit égale au Rectangle de la Droite trouvée de grandeur, par la diſtance du même Point à la Droite trouvée de poſition. Et ſi la Droite à trouver de grandeur évanouit ; la Poſition de la ſeconde Droite eſt indéterminée.

On peut auſſi rechercher le Lieu propoſé par des Procédés analogues à ceux qui ſont contenus dans les Paragraphes *d* & *i*. Je ne crois pas devoir m'arrêter à les répéter.

§. *o*. De tout ce qui précède, on peut tirer pluſieurs conſéquences ; je me contenterai d'en énoncer quelques-unes.

1°. Un nombre quelconque de Droites étant données de poſition ſur un Plan ; & d'autres Droites en nombre auſſi quelconque étant données de poſition ſur le même Plan. C'eſt une Ligne droite qui eſt le Lieu (s'il eſt déterminé) des Points de chacun deſquels abaiſſant des Perpendiculaires ſur toutes ces Droites ; la ſomme des Rectangles des Perpendiculaires abaiſſées ſur les premières Droites, par des Droites données de grandeur, eſt à la ſomme des Rectangles des Perpendiculaires abaiſſées ſur les Droites reſtantes par autant de Droites données de grandeur, dans un Rapport donné.

2°. Un nombre quelconque de Droites étant données de grandeur & de poſition ſur un Plan, c'eſt une Ligne droite qui eſt le Lieu des ſommets des Triangles ayant ces Droites pour baſes, & dont la ſomme eſt donnée. Ce qui eſt une généraliſation de la Prop. 37me. du Livre I. des Elémens d'*Euclide*.

3°. Un

3°. Un nombre quelconque de Points étant donnés de position sur un Plan; & un nombre quelconque de Droites étant données de position sur le même Plan : c'est une Circonférence de Cercle qui est le lieu des Points, de chacun desquels menant des Droites aux Points donnés, & des Perpendiculaires aux Droites données de position; la somme des Espaces qui ont aux Quarrés des premières Droites des Rapports donnés, soit à la somme des Rectangles des Perpendiculaires par des Droites données de grandeur, dans un Rapport donné. Ce qui est une généralisation des Propositions 5me. & 7me. du Livre II des Lieux Plans d'APOLLONIUS.

§. p. On pourroit faire sur les Plans & sur des Droites qui ne sont pas dans un même Plan, des recherches analogues à celles que je viens de faire sur des Lignes situées dans un même Plan. En particulier, on trouve que c'est un Plan qui est le Lieu (s'il est déterminé) des Points de chacun desquels abaissant des Perpendiculaires sur des Plans donnés de position, la somme de leurs Rectangles par des Droites données de grandeur, soit donnée de grandeur. Mais comme dans cette Dissertation je me suis proposé tout particuliérement de parler des Lignes & Figures situées sur un même Plan; je me contente d'énoncer cet objet de recherche.

Je vais terminer cette Dissertation par quelques observations critiques liées avec son objet.

*Digression sur l'Ouvrage d'*APOLLONIUS*, intitulé* les Lieux Plans.

Entre les monumens de l'Analyse des anciens Géomètres dont la perte excite les regrets de ceux des Mathématiciens modernes qui savent apprécier la marche rigoureuse & lumineuse qui caractérise les Ouvrages des premiers : On distingue tout particuliérement l'Ouvrage d'APOLLONIUS, intitulé *les Lieux Plans*. Privés de l'original de ce Traité intéressant, les Modernes ont été presque réduits à en deviner le Plan & l'exécution d'après les indices imparfaits de PAPPUS. Le lieu à la Ligne droite qui fait l'objet de cette Dissertation, ne se trouve pas en termes exprès parmi les Propositions dont PAPPUS donne les énoncés; mais on y trouve l'énoncé d'une Proposition qui est intimément liée avec celle que je développe, & à laquelle on peut la réduire. Voici le Texte de PAPPUS : *Ἐὰν ὦσιν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι θέσει δεδομέναι, καὶ ἐπ' αὐτὰς ἀπό τινος σημείου καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ δοθείσης καὶ κατηγμένης, μετὰ τοῦ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἑτέρας κατηγμένης, καὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας.* C'est-à-dire. Un nombre quelconque de Droites étant données de position : D'un même Point, soient menées aux Droites données de position des Droites sous des Angles don-

nés. Si le Rectangle contenu sous une des Droites menées, & une Droite donnée (de grandeur), augmenté du Rectangle d'une autre des Droites menées, & d'une autre Droite donnée, est égal au Rectangle fait d'une autre Droite menée & d'une autre Droite donnée, & ainsi des autres. Ce Point est à une Droite donnée de position.

Je ne connois que trois Mathématiciens modernes qui aient entrepris de rétablir les Lieux Plans d'APOLLONIUS; savoir, FERMAT, SCHOOTEN & R. SIMSON.

Le travail de FERMAT fait partie de ses Œuvres posthumes, imprimées à Toulouse en 1679. Cet Auteur ne s'occupe du Lieu traité dans cette Dissertation, que conformément à l'énoncé de PAPPUS; il ne le développe que dans le Cas tout particulier de trois Droites données de position; encore le fait-il dans la supposition particulière que les deux premières Droites données de grandeur sont égales entr'elles; & on ne voit pas comment on pourroit y réduire le Cas de leur inégalité. Lors même que le Procédé de ce Mathématicien pourroit être généralisé, & appliqué à un nombre quelconque de Droites données de position, & à un pareil nombre de Droites données de grandeur, il auroit le grand inconvénient de supposer le Lieu déjà déterminé pour tous les nombres de Droites inférieurs au nombre proposé; de manière qu'on ne peut y découvrir aucune construction générale. L'Auteur lui-même termine comme il suit, le développement du Cas unique qu'il a traité. *Beneficiò Constructionis in duabus Lineis, expedietur Problema in tribus Lineis; beneficiò Constructionis in tribus Lineis, expedietur Problema in quatuor Lineis; beneficiò Constructionis in quatuor, expedietur Problema in quinque; & simili omninò ac uniformi in infinitum methodò.* Le Procédé de FERMAT ne laisse point voir la source de l'indétermination qui peut avoir lieu dans la Question proposée: & comme il ne s'occupe que d'un seul cas, savoir de celui où les Points cherchés sont en-dedans du Triangle formé par les Droites données de position; on ne voit pas la liaison qui règne entre les différentes Positions de ces Points, & les changemens dans la Position du Lieu proposé, correspondans aux changemens de Directions des Perpendiculaires.

L'Ouvrage de SCHOOTEN, intitulé: *Exercitationum mathematicarum Libri quinque* (imprimé à Leyde en 1652), contient dans son troisième Livre le morceau intitulé, *Apollonii pergæi Loca plana restituta.* L'Auteur énonce aussi d'une manière trop particulière la Proposition qui est liée avec celle qui fait l'objet de cette Dissertation. Il ne s'occupe que du Cas où la somme des Rectangles de deux des Droites menées par deux Droites données, est égale au Rectangle de la somme des autres Droites menées par une Droite donnée. Son Procédé est purement algébrique, & analogue à celui des coordonnées par lesquelles on détermine les Equations des Courbes; il est à la vérité plus général que celui de FERMAT, mais il est bien moins élégant & moins lumineux;

& les termes par lesquels est exprimé le Rapport des Coordonnées sont si compliqués & si nombreux (pour peu que soit grand le nombre des Droites données de position), qu'on ne peut espérer d'en tirer aucune application pratique. L'Auteur ne s'occupe pas non plus des Cas indéterminés, & de la liaison qui règne entre les Positions différentes du Lieu cherché, & les changemens de Directions des Perpendiculaires qu'on regarde comme positives. Au reste, quoique la publication de l'Ouvrage de SCHOOTEN soit antérieure à celle des Œuvres posthumes de FERMAT; le travail de ce dernier est antérieur à celui du premier. (*Voy. la Lettre de Fermat à Roberval, page* 153 *de ses Œuvres*).

Les Mathématiciens anglois sont tout particuliérement ceux qui ont connu le prix de la Géométrie des Anciens, & qui ont travaillé à réparer les pertes que les Sciences ont souffertes à cet égard. Les travaux de HALLEY sur cette partie des mathématiques font également honneur à la sagacité de ce digne ami de NEWTON & à la profondeur de ses connoissances; mais ils ne sont pas rélatifs à l'objet particulier dont je m'occupe. Le travail le plus complet sur les Lieux Plans d'Apollonius, est celui du célèbre Mathématicien ROBERT SIMSON, Professeur de Mathématiques à l'Université de Glasgow, qui a paru dans cette ville en 1749, sous le titre; *Apollonii pergæi Locorum planorum, Libri duo.*

SIMSON dans cet Ouvrage, suit d'abord l'énoncé de PAPPUS; & il montre dans un Corollaire la liaison qui règne entre le Lieu que je me suis proposé comme principal, & celui qu'il développe.

Cet Auteur entre dans de si grands détails & des distinctions si nombreuses, que le développement de cette Proposition occupe plus de 50 pages 4°. (35-91). Cependant il ne développe complétement que le Cas de trois Droites parallèles données de position; il ne développe qu'un seul des Cas où trois Droites données de position partent d'un même Point, se contentant de dire que les cinq autres Cas se traitent de la même manière. Lorsque les trois Droites données de position ne sont ni parallèles ni concurrentes en un Point; au lieu de montrer, comme je l'ai fait, la Liaison qui règne entre ce Cas & celui où les Droites concourent en un Point (ce qui abrège considérablement l'Analyse & la Construction); il le réduit au Cas de deux Droites données de position, auxquelles on doit mener sous des Angles donnés des Droites ayant entr'elles des Rapports donnés. Il montre ensuite comment le Cas de quatre Droites se réduit au Cas de trois Droites.

Si SIMSON avoit eu la patience de traiter avec la même prolixité les Cas d'un plus grand nombre de Droites données de grandeur & de position, je doute qu'il eût trouvé des Lecteurs qui eussent eu celle de le suivre dans ses Développemens. Sa marche a, comme celle de FERMAT, le grand inconvénient de procéder successivement d'un

nombre donné de Droites, à un nombre immédiatement plus grand d'une Unité; ensorte que le Développement d'un Exemple quelconque de Droites données suppose celui de tous les nombres inférieurs de Droites. Les Propositions générales sur lesquelles mon Procédé est appuyé, me paroissent le rendre non-seulement immédiat pour tout nombre de Droites, mais encore incomparablement plus lumineux & plus satisfaisant; & tout particuliérement il est long & pénible de tirer du Procédé de SIMSON le Cas indéterminé, qui découle d'une manière si simple de mon Procédé, & qui conduit à des Propositions si remarquables sur les Figures rectilignes & sur le Centre de Gravité.

Je me plais à reconnoître que c'est à l'étude approfondie que j'ai faite des Ouvrages nombreux de ce grand Géomètre, que je suis principalement redevable des lumières (quelles qu'elles soient), que je possède dans cette Partie de la Géométrie; & je suis pénétré pour sa mémoire de la plus profonde vénération. Le jugement que j'ose porter sur la forme d'une partie de ses Ouvrages, est donc bien moins un blâme, qu'une suite des regrets que j'éprouve, en voyant presque ignorés dans le Continent ces Ouvrages si dignes d'être connus. Pénétré de l'excellence de la méthode des Anciens, ne s'y est-il point tenu trop strictement attaché; & pour rendre ses travaux plus utiles, n'auroit-il point dû condescendre quelque peu au goût de notre siècle, en présentant les objets qui en sont facilement susceptibles, sous une Forme symbolique, qui en rend la Tractation plus abrégée & plus commode, & l'Expression plus intuitive & plus générale.

J'éclaircirai ma pensée à ce sujet par un seul Exemple rélatif à l'Ouvrage appelé par les Anciens, de la *Section déterminée*.

Quatre Points étant donnés de position sur une Ligne Droite : Trouver sur la même Droite un cinquième Point tel qu'il soutienne rélativement aux quatre Points donnés des Rélations qui soient les mêmes à l'égard de deux des Points donnés, & aussi les mêmes à l'égard des deux autres Points donnés.

Que les deux premiers Points, qui entrent de la même manière dans la Question proposée, soient désignés par A & A'; & que les deux autres Points soient désignés par B & B' : que le Point cherché soit désigné par X.

Les Positions des Points donnés reviennent aux trois suivantes $AA'BB'$, $ABA'B'$, $ABB'A'$

A chacune de ces Positions répondent trois Positions différentes du Point cherché; & partant, les Positions différentes des Points donnés & du Point cherché, se réduisent aux neuf suivantes

$XAA'BB'$	$XABA'B'$	$XABB'A'$
$AXA'BB'$;	$AXBA'B'$;	$AXBB'A'$.
$AA'XBB'$	$ABXA'B'$	$ABXB'A'$

SII

S'il avoit fallu faire par le langage ordinaire (dont on sent souvent l'Imperfection, quand on s'occupe d'objets généraux & abstraits) l'énumération complette de ces neuf Cas, on voit combien elle eût été plus longue & moins lumineuse qu'elle ne le devient en employant le Tableau symbolique qui la met immédiatement sous les yeux. Ainsi, la première position *XAA'BB'*, devroit s'exprimer comme il suit en langage ordinaire : Les deux premiers Points donnés sont adjacens l'un à l'autre ; les deux derniers Points donnés sont aussi adjacens l'un à l'autre ; & deux Points donnés d'une même espèce sont situés entre le Point cherché & les deux autres Points donnés. La différence de la longueur de cette Description verbale, & du Tableau symbolique qui lui correspond, est d'autant plus frappante, que le nombre des espèces différentes des objets dont on est appelé à s'occuper est plus grand.

Digression sur les Porismes. (Voyez les §§. *g*. & *n*.)

Les Porismes sont un genre de Propositions sur lesquelles EUCLIDE (au rapport de PAPPUS) avoit écrit trois Livres, qui ont été perdus, ainsi que tant d'autres monumens de la Géométrie & de l'Analyse des Anciens. Quelques modernes (FERMAT & BOUILLAUD, par exemple), avoient fait des efforts pour deviner la nature de ces Propositions, mais avec peu de succès. ROBERT SIMSON a été plus heureux ; & il a composé un beau Traité des *Porismes*, qui fait partie de la Collection de ses Œuvres posthumes, dont nous devons la publication à la générosité de feu Milord Comte STANHOPPE, & à son zèle pour les progrès d'une science qu'il avoit lui-même approfondie. Avant SIMSON, nous n'avions pas même une Définition de ce genre de Propositions. J'avoue qu'il est difficile de comprendre celle que ce Géomètre en donne, avant d'en avoir vu quelque Exemple ; mais aussi, un seul d'entr'eux bien choisi suffit pour l'éclaircir.

Exemple. Soit un Cercle & une Droite donnés de position. On peut trouver un Point tel ; que, menant de ce Point une Droite quelconque terminée d'une part à la Droite donnée de position, & de l'autre part à la Circonférence du Cercle ; le Rectangle des Parties de cette Droite, comprises, l'une entre ce Point & la Droite, & l'autre entre le même Point & la Circonférence, soit d'une grandeur constante. Dans cette Proposition il y a deux objets inconnus ; l'un la Position du Point, & l'autre la grandeur du Rectangle des Parties des Droites menées. Mais ces deux objets inconnus sont tellement liés l'un avec l'autre, que l'un d'eux ne peut être déterminé sans que l'autre ne le soit aussi. Savoir, le Point à trouver est une des Extrêmités du Diamètre perpendiculaire à la Droite donnée de position ; & le Rectangle qui lui correspond est celui du Diamètre par la Distance de cette Extrêmité à la Droite donnée de position.

Bb

Par cet Exemple on comprendra la *Définition* que donne SIMSON de ce genre de Propositions. *Porisma est Propositio in qua proponitur demonstrare rem aliquam vel plures datas esse, cui vel quibus ut & cuilibet ex rebus innumeris, non quidem datis, sed quæ ad ea quæ data sunt eandem habent relationem; convenire ostendendum est affectionem quandam communem in Propositione descriptam.*

Dans l'Exemple précédent: L'Objet principal inconnu est la position du Point (qui se trouve être une des Extrémités du Diamètre). Les Objets qui ont une même Rélation à ce Point, sont les segmens des Droites menées par ce Point, compris entre Lui, la Droite & la Circonférence. La propriété commune appartenante à ces segmens est la constance de leur Rectangle. Et la grandeur de ce Rectangle, & la Position du Point cherché, sont tellement liées l'une avec l'autre qu'elles se déterminent mutuellement. Au reste, on peut à volonté énoncer un Porisme comme Problême ou comme Théorême.

Je vais appliquer cet éclaircissement au Porisme auquel j'ai été conduit par le sujet de ce Mémoire. Une Figure étant donnée de grandeur & d'espèce; & des Droites en nombre égal à celui de ses Côtés (& qui ne sont pas toutes dans les Rapports de ses Côtés) étant données de grandeur. On peut trouver une Droite de position, une Droite de grandeur, & un Espace aussi de grandeur; tels, que, si d'un Point quelconque on abaisse des Perpendiculaires sur les Côtés de la Figure; la somme (prise dans le sens général) des Rectangles de ces Perpendiculaires par les Droites données de grandeur differe de l'Espace à trouver, du Rectangle de la Perpendiculaire abaissée sur la Droite à déterminer de position, par la Droite à déterminer de grandeur. Les Quantités inconnues, mais déterminables les unes par les autres & par les Quantités connues, sont, la Position d'une Droite, la Grandeur d'un Espace, & la Grandeur d'une autre Droite. Les Quantités qui ont une Rélation constante à deux de ces Quantités inconnues sont, les Rectangles des Perpendiculaires abaissées sur la Droite à déterminer de position par la Droite à déterminer de grandeur; & la propriété commune à ces Rectangles, est leur différence constante & déterminée, à la somme des Rectangles des Perpendiculaires abaissées des mêmes Points sur les Côtés de la Figure, par les Droites données de grandeur.

Observation sur la Loi de Continuïté.

(Voyez les §§. *b.* & *c.*)

La Loi de Continuïté est un des Principes favoris d'un grand nombre de Métaphysiciens, de Naturalistes, de Physiciens & de Mathématiciens, appuyé plutôt

ſur une Analogie pouſſée trop loin que ſur des Raiſonnemens rigoureux (*). Je m'abſtiens de toute Digreſſion ſur les trois premiers chefs; & m'en tenant aux Mathématiques pures, je crois voir dans l'Objet de ce Mémoire un Exemple remarquable à un double égard, d'une Exception à ce Principe.

Soient comme dans le §. *e*. un nombre quelconque de Droites SA, SB, SC, -- SM, SN, menées par un même Point, données de grandeur & de poſition ſur un Plan. Soit cherché le Lieu des Points Z de chacun deſquels abaiſſant des Perpendiculaires ſur ces Droites, la ſomme de leurs Rectangles par les Droites données de grandeur SA, SB, SC, ---- SM, SN, ſoit d'une grandeur conſtante. Tant que le Point S n'eſt pas le Centre commun de Gravité des Points A, B, C, ---- M, N; le Lieu des Points cherchés eſt déterminé & unique; & l'Eſpace donné n'eſt ſuſceptible d'aucune Limite ſoit en grandeur ſoit en petiteſſe. Or, par des changemens auſſi nuancés qu'on le veut dans la grandeut & la poſition des premières Droites, on peut produire des changemens correſpondans dans la poſition du Centre de Gravité Z rélativement au Point S; & tant que ces changemens ne tendent pas à confondre ce Centre de Gravité avec le Point S, le Lieu des Points cherchés demeure unique, & déterminé par l'Eſpace donné de grandeur. Mais au moment où le Centre de Gravité Z s'eſt approché du Point S (par des nuances auſſi imperceptibles qu'on le veut), juſqu'à ſe confondre avec lui; il ſe fait un double ſaut, qui me paroît violer complétement le Principe de la Loi de Continuïté. D'une part, les Points S & Z étant différens, le Lieu des Points Z eſt limité à être une Droite unique, déterminée, ſoit par la Poſition des Points donnés dont Z eſt le Centre de Gravité, ſoit par la grandeur de l'Eſpace donné; au lieu que les Points S & Z venant à coïncider, le Lieu des Points Y eſt entiérement indéterminé, & tous les Points du Plan ſur lequel ſont les Droites données jouiſſent de la même propriété. De l'autre part, dans le premier Cas, l'Eſpace propoſé n'eſt ſuſceptible d'aucune Limite ſoit en grandeur ſoit en petiteſſe; dans le ſecond Cas, il eſt déterminé à évanouïr, ou ne peut avoir qu'une ſeule valeur (ſi on peut appeler ainſi le zéro). Il y a donc un double paſſage ſubit; l'un du fini à l'infini, & l'autre de l'infini au fini; paſſage qui ne ſuit pas la marche nuancée de ſa Cauſe, ſavoir, la Diminution nuancée de la Diſtance du Point S & du

(*) Je dois mes premiers doutes ſur l'univerſalité de ce Principe, à M. LE SAGE (mon Parent & mon Guide privé dans mes Etudes philoſophiques). Non-ſeulement il m'en développa pluſieurs Exceptions dans la Phyſique & l'Hiſtoire naturelle, mais encore il me mit en garde contre ſes Applications dans les Mathématiques pures, comme étant ſuſceptibles d'abus. Ce n'eſt pas ici le lieu de développer ces Exceptions & abus; il l'a fait lui-même en abrégé aux deux premiers égards dans ſon *Eſſai de Chymie méchanique*, couronné par l'Académie de Rouën, & dans les *Opuſcoli Scelti* de Milan, année 1784.

Centre de Gravité des Extrêmités des Droites données de grandeur & de position. Et la même Difficulté s'applique au Cas où les Droites données de position ne partent pas d'un même Point; avec la différence que la Grandeur de la somme des Rectangles est déterminée à être une Quantité finie (§. *m.*), au lieu d'être déterminée à évanouïr.

Remarque, rélative à l'Assertion d'un grand nombre de Mathématiciens: Que le Produit de Zéro par l'Infini est une Quantité finie; & à l'Egalité des Produits (encore ainsi nommés) dont Zéro est un des Termes.

Tout étant posé comme dans l'Observation précédente : La somme des Rectangles des Perpendiculaires abaissées d'un Point *Y* sur les Droites données de position par les Droites données de grandeur, est proportionnelle au Rectangle de la Droite *SZ* par la Distance de ce Point à *SZ*. Partant; la Droite *SZ* restant la même, la somme des Rectangles croit avec la Distance du Point *Y* à *SZ*, & cette somme n'a aucune Limite en grandeur. Mais si le Point *Z* se meut sur la Droite *SZ* vers le Point *S*, jusqu'à se confondre avec lui, à quelque distance que le Point *Y* soit pris de la Direction qu'avoit *SZ* avant qu'elle fût évanouïe; la Grandeur de cette somme reste la même, savoir zéro. Donc, en particulier (en employant le langage familier aux Partisans de l'Infini), cette Distance étant devenue infinie, l'Expression $0 \times \infty$ demeure zéro; tandis que (suivant le même langage) on affirme que ce dernier Produit est une Quantité finie (*Voyez entr'autres mon Exposition déjà mentionnée, Chapitre XI, page* 157 *& suivantes*).

La somme des Rectangles étant proportionnelle au Rectangle de *SZ* par la Distance du Point *Y* à *SZ*; en particulier, si le Point *Y* est pris sur *SZ*, cette somme est proportionnelle au Rectangle (ainsi nommé) de *SZ* par zéro. Mais cette somme est un seul & même zéro, puisqu'elle est la Différence de deux sommes égales (par la Propriété principale du Centre de Gravité); donc, la Grandeur du Produit évanouï de *SZ* par zéro, ne dépend point de la grandeur de *SZ*; donc, tous les Produits évanouïs dont zéro est un des Termes sont un seul & même, quel que soit l'autre Terme. En particulier; que *SZ* sans changer de Direction, diminue successivement jusqu'à évanouïr, le Produit de zéro par zéro demeure un seul & même zéro; & n'indique pas, comme l'affirment les Partisans des infiniment petits, un infiniment petit du second ordre. Ou bien, s'il étoit possible que *SZ* devint infinie, le Point *Y* étant toujours pris sur *SZ*; le Produit $0 \times \infty$ demeurera zéro.

Fin de l'Appendice.

AVIS.

AVIS.

LE Traité suivant d'ISOPÉRIMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE est l'Abrégé d'un Ouvrage plus étendu sur le même Sujet, publié à Varsovie en 1782 sous le Titre *De Relatione mutua Capacitatis & Terminorum Figurarum, &c.* Mon principal but dans la composition de cet Ouvrage, étoit de suppléer sur ce Point aux Cours ordinaires d'Elémens de Géométrie; & de déterminer dans chacune des Classes de Figures qu'on y traite, celle qui jouït du Minimum de Contour avec la même Capacité, & réciproquément du Maximum de Capacité avec le même Contour. Mais à ce but principal se joignit un but secondaire. Je voulois montrer la facilité avec laquelle les Procédés élémentaires peuvent s'appliquer à la découverte & à la démonstration de plusieurs Propositions qu'on a coutume de traiter par les Calculs supérieurs. En conséquence, aux Propositions qui constituent le Traité élémentaire d'Isopérimétrie proprement dit, je joignis un grand nombre de Remarques & de Propositions, dont quelques-unes sont liées avec les premières, & dont le plus grand nombre sont isolées. Il est arrivé de là, que les Propositions qui composent par leur enchaînement un Corps de Doctrine, n'ont fait qu'une partie très petite de cet Ouvrage, & qu'elles ont été séparées par des Remarques & des Propositions incidentes; que j'ai eu à la vérité l'attention de détacher des premières sous des Titres bien distincts, mais qui ont considérablement augmenté le volume. La langue dans laquelle cet Ouvrage est écrit (si négligée chez nous & chez nos voisins), & l'éloignement du pays où il a été publié, peuvent avoir nui à sa publicité. Cependant la dépendance mutuelle du Contour & des Grandeurs des Figures dont la contemplation est du ressort de la Géométrie élémentaire, me paroît être une partie essentielle d'un Cours d'Elémens; & mériter d'être developpée autant, au moins, que quelques-unes des propriétés de l'Etendue, qui sont unanimément reconnues comme appartenantes à un pareil Cours. Je me suis donc tout particuliérement attaché à ne faire entrer dans cet Abrégé que les Propositions dont l'assemblage forme un Corps de Doctrine; de manière que leur enchaînement ne fût point interrompu; & je ne me suis permis qu'un très-petit nombre de remarques nécessaires pour éclaircir les Propositions principales.

L'Introduction à l'Ouvrage déjà cité contient des Détails historiques & des Remarques critiques, que mon Plan de briéveté m'engage à supprimer. Je réveillerai seulement l'attention de mes Lecteurs, sur la propriété dont jouïssent un grand nombre de

Cc

Figures d'avoir leurs Contours proportionnels à leurs Capacités. Cette propriété sert de base aux Propositions les plus intéressantes d'Isopérimétrie élémentaire, en tant qu'elle appartient aux Figures planes circonscrites à un même Cercle (§. 14), aux Prismes circonscrits à un même Cylindre droit (§. 27), aux Pyramides circonscrites à un même Cône droit (§. 38), & aux Solides circonscrits à une même Sphère (§. 39). C'est encore à M. Le Sage (mon Parent & mon Guide dans mes Etudes philosophiques), que je dois mes premières connoissances sur cette matière intéressante. Ses méditations sur les Points les plus importans de la Physique générale l'avoient amené à s'occuper de cet objet, avant qu'il connût (& qu'il m'eût fait ensuite connoître) la Dissertation de Zanotti qui se trouve dans les Mémoires de l'Académie de Paris pour 1748; & il s'en étoit occupé d'une manière plus étendue que ce dernier Mathématicien, en déterminant plusieurs Figures planes & solides, non-circonscriptibles au Cercle & à la Sphère, qui jouïssent de la même propriété. Je résous aussi dans ledit Ouvrage le Problême général suivant : Une Figure (superficielle ou solide) étant donnée de grandeur & d'espèce ; & une autre Figure (aussi superficielle ou solide) étant donnée d'espèce seulement ; on peut déterminer la grandeur de cette dernière, de manière que leurs Capacités soient entr'elles comme leurs Contours.

Quoique cet Opuscule ne soit qu'un Abrégé, il contient cependant quelques changemens essentiels. La généralité de la première Proposition, la rend appliquable en même tems aux Figures planes & aux Figures solides. J'ai réuni sous un seul Chapitre les Parallélipipèdes & les Prismes. Je n'ai pas eu besoin de traiter séparément les Pyramides triangulaires ; & par-là le Chapitre troisième (celui qui m'a coûté le plus de travail, & qui me paroît le plus remarquable) se trouve considérablement abrégé.

Peut-être est-il superflu de faire remarquer la liaison qui règne entre les deux Opuscules que je publie en même tems. Dans le premier, je me proposois tout particuliérement d'estimer les surfaces des Figures dans les Quantités (Lignes & Angles) qui constituent leurs Contours ; dans celui-ci, je détermine la Limite des premières, en tant qu'elle dépend des dernières. Mais l'objet de ce second Opuscule devient plus vaste que celui du premier ; & il s'étend aux Solides, tandis que, dans le premier, je me suis borné aux Figures planes.



ABRÉGÉ D'ISOPÉRIMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

CHAPITRE PREMIER.

Des Figures planes.

§. 1. Lemme. *Soient deux Triangles rectangles dont on connoît une Jambe de l'Angle droit de chacun d'eux : On connoît aussi la Somme des Rectangles des deux autres Jambes par des Droites données de grandeur. J'affirme, que la Somme des Rectangles des Hypothénuses par les mêmes Droites est la plus petite lorsque ces deux Triangles sont semblables.*

Soient ABX, $A'B'X'$, deux Triangles Rectangles, dont on connoît les Jambes AB, $A'B'$, Fig. I.
des Angles droits ; soit donnée la Somme des Rectangles des autres Jambes BX, $B'X'$, par des Droites données L & L'. J'affirme ; que la Somme des Rectangles des Hypothénuses AX & $A'X'$ par les mêmes Droites L & L' est la plus petite lorsque les Triangles ABX, $A'B'X'$, sont semblables.

Que la Somme donnée des Rectangles, $L \times BX$ & $L' \times B'X'$, soit égale au Rectangle de la Droite L' par une Droite $B'B''$ qui sera donnée de grandeur. Puisque $L \times BX + L' \times B'X' = L' \times B'B''$; ôtant de part & d'autre le Rectangle $L' \times B'X'$; on obtient $L \times BX = L' \times B''X'$; donc, $L : L' = B''X' : BX$. Soit changé le Rapport donné de L' à L dans le Rapport de AB, à une Droite qui sera donnée de grandeur ; & soit $B''A''$ perpendiculaire à $B'B''$ égale à cette Droite. Soit menée $A''X'$. Puisque $L : L' = B''A'' : AB$; & $L : L' = B''X' : BX$; on a aussi, $B''A'' : AB = B''X' : BX$. Donc, les Triangles ABX, $A''B''X'$, sont semblables ; donc, $AX : A''X' = AB : A''B'' = L' : L$. Donc, $AX \times L = A''X' \times L'$. Donc, $AX \times L + A'X' \times L' = A''X' \times L' + A'X' \times L' = L' (A'X' + A''X')$. Donc, la Somme des Rectangles $AX \times L$ & $A'X' \times L'$, est proportionnelle à la Somme des Droites $A'X'$ & $A''X'$; donc, la Somme de ces Rectangles

est la plus petite, lorsque la Somme des Droites $A'X'$ & $A''X'$ est la plus petite; c'est-à-dire, lorsque les trois Points A', X', A'', sont en ligne droite. Alors, les Triangles $A'B'X'$, $A''B''X'$, sont semblables; mais les Triangles ABX, $A''B''X'$, sont toujours semblables; donc, dans le cas du *minimum*, les Triangles ABX, $A'B'X'$, sont semblables.

§. 2. En particulier, la Somme simple des Droites BX, $B'X'$, étant donnée; la Somme des Hypothénuses AX, $A'X'$, est la plus petite, lorsque les Triangles ABX, $A'B'X'$, sont semblables. Ou bien, *de tous les Triangles de même Base; dont les Sommets sont sur une même Droite donnée de position; celui dont le Contour est le plus petit, est tel, que ses Côtés sont également inclinés à cette Droite.*

Ce Cas particulier (développé dans plusieurs Traités d'Optique & de Méchanique), se démontre plus briévement que la Proposition plus générale à laquelle il appartient. Mais comme j'aurai besoin dans la suite de cette dernière, j'ai cru devoir débuter par elle.

§. 3. Corollaire premier. *De tous les Triangles de même Base & de même Hauteur*, ou de tous les Triangles égaux & de même Base, *le Triangle isoscèle a le Contour le plus petit.*

§. 4. Corollaire second. *De tous les Triangles de même Surface, celui qui a le Contour le plus petit est équilatéral.* En effet, le Triangle du plus petit Contour avec la même Surface doit être isoscèle, quel que soit celui de ses Côtés qu'on regarde comme sa Base. Donc, dans le Triangle du plus petit Contour, tous les Côtés sont égaux deux à deux; donc, ils sont tous égaux entr'eux. Donc enfin, de tous les Triangles égaux, celui qui a le Contour le plus petit est équilatéral.

§. 5. *Corollaire troisième.* On conclut, par un raisonnement semblable; que, *de toutes les Figures données de grandeur & d'un nombre donné de Côtés, celle qui a le Contour le plus petit a tous ses Côtés égaux.* Savoir, tant que deux Côtés adjacens ne sont pas égaux, menant la Diagonale qui retranche ces deux Côtés, on peut obtenir une Figure égale à elle, qui n'en differe que par l'Egalité des Côtés du Triangle retranché par cette Diagonale, & qui par conséquent a un Contour plus petit.

Remarque, rélative aux §§. 4 & 5. Quand un Triangle donné de grandeur a tous ses Côtés égaux; il est déterminé. Mais on peut faire, autant qu'on veut, de Figures égales ayant un nombre donné de Côtés égaux. On peut donc conclure qu'un Triangle équilatéral a un Contour plus petit qu'aucun autre Triangle de même Surface; mais, pour les Figures d'un plus grand nombre de Côtés, on obtient seulement à cet égard une propriété caractéristique de la Figure du plus petit Contour, insuffisante pour la déterminer.

§. 6.

§. 6. Pour illustrer la Proposition du §. 4, je crois devoir y joindre les Eclaircissemens suivans. Quand on a un Triangle isoscèle (dont la Base n'est pas égale à ses Jambes); en prenant pour Base une des Jambes de ce Triangle, on peut faire un autre Triangle isoscèle égal à lui, mais d'un Contour plus petit. Puis, si la Base & les Jambes de ce second Triangle isoscèle ne sont pas égales entr'elles, on fera un troisième Triangle isoscèle égal à lui, mais d'un Contour plus petit; & ainsi de suite. J'affirme, que les Triangles successifs qu'on obtient approchent toujours davantage d'être équilatéraux.

Et d'abord, il suffit de s'occuper des Triangles isoscèles dont l'Angle au Sommet est aigu. En effet, si deux Triangles ont deux Angles supplémens l'un de l'autre; & si les Jambes de ces Angles dans les deux Triangles sont respectivement égales; ces Triangles sont égaux entr'eux. Or, le Côté restant est plus petit dans le Triangle qui a l'Angle opposé aigu. Donc, dans la recherche du Triangle du plus petit Contour, il suffit de s'occuper des Triangles isoscèles dont l'Angle au Sommet est aigu.

Cela posé. Soit ABC un Triangle isoscèle dont l'Angle au Sommet C est aigu, & dont la Base AB n'est pas égale aux Jambes AC, BC. Par A soit menée à BC une Parallèle; & soit BDC un Triangle isoscèle égal à ABC & ayant BC pour Base. J'affirme, que la Différence de la Base & d'une Jambe du Triangle BDC est plus petite que la Différence de la Base & d'une Jambe du Triangle ABC. Fig. II. 1°. & 2°.

Premier Cas. La Base AB est plus petite qu'une Jambe AC. 1°.

Dans le Triangle CAD, l'Angle en D est obtus (comme supplément d'un Angle à la Base du Triangle isoscèle BCD); donc, AC ou $BC > CD$. Mais dans le Triangle ABD, l'Angle en A est obtus (comme supplément d'un Angle à la Base du Triangle isoscèle ABC; donc, $BD > AB$. Donc, $BC - BD < BC - AB$.

Second Cas. La Base AB est plus grande qu'une Jambe AC. 2°.

Dans le Triangle CAD, l'Angle en A est obtus (comme supplément de l'Angle aigu ACB). Donc, $CD > AC$ ou BC. Mais, dans le Triangle BAD, l'Angle en D est obtus (comme supplément d'un Angle à la Base du Triangle isoscèle BCD). Donc, $AB > BD$. Donc, $AB - BC > BD - BC$.

On voit donc; que dans les opérations successives qu'on doit faire pour diminuer le Contour d'un Triangle isoscèle donné de grandeur, en prenant pour Base de l'un une Jambe du Triangle précédent; on passe alternativement des Triangles dont la Base est plus grande ou plus petite que les Jambes, à ceux dont la Base est plus petite ou plus grande qu'elles; mais que la Différence de la Base & d'une Jambe va toujours en diminuant, de manière qu'il n'y a aucune Limite à cette Diminution tant qu'il y a une Inégalité.

§. 7. Théorême. *De tous les Triangles de même Base & de même Contour, le Triangle isoscèle a la plus grande Surface.*

Fig. III. Soient *ABC*, *ABD*, deux Triangles de même Base *AB*, & de même Contour, dont l'un *ABC* est isoscèle, & l'autre *ABD* ne l'est pas. J'affirme, que le Triangle *ABC* a une Surface (ou une Hauteur) plus grande que la Surface (ou la Hauteur) du Triangle *ABD*.

Soit *CE* perpendiculaire à *AB*. Que la Parallèle à *AB* menée par *D*, rencontre *CE* en *C'*; & soient menées *AC'*, *BC'*. Il faut prouver que *CE* est plus grande que *C'E*.

Démonstration. Les Triangles *AC'B*, *ADB*, ont même Base & même Hauteur; & le Triangle *AC'B* est isoscèle, tandis que *ADB* ne l'est pas; donc, le Triangle *AC'B* a un Contour plus petit que le Triangle *ADB* (§. 3.) ou *ACB*; donc, $AC' < AC$; donc, dans les Triangles rectangles *AEC*, *AEC'*, $EC' < EC$.

Remarque. On démontre par un Procédé semblable; que, *de tous les Triangles de même Hauteur & dont la Somme des deux Jambes est la même; celui qui est isoscèle a la plus grande Base.*

§. 8. Corollaires. *De toutes les Figures isopérimètres dont le nombre des Côtés est donné; celle qui est la plus grande a tous ses Côtés égaux.* Et en particulier, *de tous les Triangles isopérimètres, celui qui a la plus grande Surface est équilatéral.* En effet, tant que deux Côtés adjacens ne sont pas égaux, on peut augmenter la Surface sans changer le Contour.

Scholie. Je pourrois donner une Démonstration immédiate de la propriété du Triangle équilatéral d'avoir la plus grande Surface avec le même Contour; & en déduire l'inverse du plus petit Contour avec la même Surface. Mais elle auroit l'inconvénient de partir d'une Proposition sur les Solides (aisée à démontrer; voyez *Relatio*, *&c.* §. 91) pour en déduire une Propriété des Figures planes. Je me contenterai donc d'en ébaucher la marche. Il est connu: Que la Surface d'un Triangle dont le Contour est donné, est en raison sous-doublée du Parallélépipède rectangle dont les Arrêtes sont les Excès du demi-Contour sur chacun des Côtés du Triangle. La Somme de ces Excès est donnée; savoir, le demi-Contour lui-même. Et le plus grand des Parallélépipèdes rectangles dont la Somme des Arrêtes est donnée, est le Cube; savoir, celui dont les Arrêtes sont égales. Donc, de tous les Triangles de même Contour, le plus grand est celui qui est tel, que les Excès du demi-Contour sur chacun de ses Côtés sont égaux entr'eux; c'est-à-dire, celui dont les trois Côtés sont égaux.

Après avoir trouvé une Propriété distinctive de la Figure du plus petit Contour avec la même Surface; & réciproquement de la plus grande Surface avec le même

Contour, rélative à ses Côtés; savoir, leur Egalité. Je passe à une Propriété de cette Figure rélative à ses Angles.

§. 9. Lemme premier. *De tous les Triangles dont deux Côtés sont donnés de grandeur, le plus grand est celui dans lequel ces deux Côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre.*

En effet. Prenant pour Base un des Côtés donnés; la Surface est proportionnelle à la Perpendiculaire abaissée sur ce Côté, depuis l'Extrêmité opposée de l'autre Côté donné. Donc, la Surface est la plus grande lorsque cette Perpendiculaire est la plus grande; c'est-à-dire, lorsqu'elle est égale au second des Côtés donnés; c'est-à-dire enfin, lorsque les Côtés donnés sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Ou bien; la Surface d'un Triangle dont deux Côtés sont donnés, est proportionnelle au Sinus de l'Angle formé par ces Côtés. Donc elle est la plus grande, lorsque le Sinus de cet Angle est le plus grand; c'est-à-dire, lorsque cet Angle est droit.

§. 10. Lemme second. *De toutes les Figures dont on connoît tous les Côtés excepté un, la plus grande est celle qui est inscriptible à un demi-Cercle dont le Côté non-donné est le Diamètre.*

En effet. Tant que la Figure faite avec les Côtés donnés & le Côté ignoré n'est pas inscriptible à un demi-Cercle dont ce dernier est le Diamètre; c'est-à-dire, tant que l'un quelconque des Angles formés par les Droites menées des Extrêmités du Côté inconnu à un des Sommets de la Figure, n'est pas droit; on peut faire une Figure plus grande qu'elle, dans laquelle cet Angle soit droit, & qui n'en diffère qu'à cet égard. Donc, tant que tous les Angles formés par les Droites menées des Sommets de la Figure aux Extrêmités du Côté inconnu, ne sont pas droits, cette Figure n'est pas la plus grande.

§. 11. Théorême. *De toutes les Figures faites avec des Côtés donnés de grandeur; celle qui est inscriptible à un Cercle est la plus grande.*

Que l'Hexagone *ABCDEF* représente une Figure quelconque inscriptible au Cercle; Fig. IV.
& que la Figure *abcdef* faite avec les mêmes Côtés disposés dans le même ordre, ne soit pas inscriptible au Cercle. J'affirme; que l'Hexagone *ABCDEF* est plus grand que l'Hexagone *abcdef.*

Construction. Soit mené un Diamètre quelconque *AG*; & soient menées les Droites *GC*, *GD*, aux Sommets *C* & *D* les plus voisins de son Extrêmité *G*. Sur le Côté *cd*, correspondant à *CD*, soit construit le Triangle *cgd*, dont les Côtés *cg*, *dg*, soient respectivement égaux aux Côtés *CG*, *DG*. Soit menée *ag*.

Démonstration. Des deux Figures, *abcg*, *gdefa*; l'une au moins n'est pas inscriptible au demi-Cercle dont *ag* est le Diamètre. Donc (§. 10); l'une au moins de ces deux Figures est plus petite que la Partie correspondante de la Figure *ABCGDEF*.

Donc, la Figure *ABCGDEF* est plus grande que la Figure *abcgdef*. Mais les Triangles *CGD*, *cgd*, peuvent convenir ; & en particulier ils sont égaux. Donc, la Figure *ABCDEF* est plus grande que la Figure *abcdef*.

Remarque. Si une Figure inscrite à un Cercle a tous ses Côtés donnés, la grandeur de cette Figure ne dépend pas de la disposition de ses Côtés. En effet, les Triangles ayant ces Côtés pour Bases, & ayant pour Sommet commun le Centre du Cercle, sont déterminés chacun par ces Côtés & le Rayon ; donc, la grandeur de leur Assemblage ne dépend pas de leur Disposition. Et il est évident qu'il y a un seul Cercle auquel on peut inscrire une Figure dont tous les Côtés sont donnés. En effet ; s'il y avoit deux Cercles auxquels on pût inscrire des Figures faites avec les mêmes Côtés ; les Angles au Centre formés par les Rayons menés aux Extrêmités de ces Côtés seroient tous plus grands dans l'une de ces deux Figures que dans l'autre ; donc, les Sommes de ces Angles ne seroient pas constantes. Ce qui est absurde.

Donc enfin ; *la Surface du plus grand Polygone fait avec des Côtés donnés de grandeur demeure la même, quelle que soit la Disposition de ces Côtés.*

§. 12. Lemme. *Si une Figure inscrite à un Cercle a tous ses Côtés égaux ; tous ses Angles sont aussi égaux, ou elle est régulière.*

En effet. Les Triangles isoscèles ayant leur Sommet commun au Centre du Cercle, & ayant pour Bases les Côtés de la Figure, peuvent tous convenir ; donc, en particulier, les Angles sur les Bases de ces Triangles sont tous égaux entr'eux. Mais chaque Angle de la Figure est la Somme de deux de ces Angles. Donc, tous les Angles de cette Figure sont égaux entr'eux ; donc, cette Figure est régulière.

§. 13. Théorême. *De toutes les Figures d'un même nombre de Côtés & de même Contour, la plus grande est régulière.*

En effet. La Figure la plus grande faite avec ces conditions a tous ses Côtés égaux (§. 8.) : mais on donne la Somme & le nombre de ses Côtés ; donc, chacun d'eux est donné ; donc (§. 11.), cette Figure est inscriptible au Cercle. Donc (§. 12.) tous ses Angles sont égaux ; donc, elle est régulière.

Les Figures régulières jouïssent donc de la propriété du Maximum de Surface, rélativement à toutes les Figures de même nom & de même Contour.

Réciproquement. *Une Figure régulière a un Contour plus petit qu'une Figure irrégulière égale à elle, & ayant le même nombre de Côtés.*

En effet, soient *R* & *I* deux Figures égales & d'un même nombre de Côtés dont l'une *R* est régulière, & l'autre *I* est irrégulière. J'affirme que la Figure *R* a un Contour plus petit que la Figure *I*.

Soit *R'* une Figure régulière semblable à *R* & du même Contour que *I*.

Donc

Donc (§. 13.), $R' > I$; mais, $I = R$; donc $R' > R$. Mais, R' & R ſont ſemblables; donc, $Cont.\ R' > Cont.\ R$. Mais, $Cont.\ R' = Cont.\ I$; donc, $Cont.\ I > Cont.\ R$. *C. q. f. d.*

Scholie. Après avoir établi la propriété de Maximum de Surface & de Minimum de Contour des Figures régulières, rélativement aux Figures irrégulières de même nom, je paſſe à la Comparaiſon de ces Figures entr'elles, & à l'Influence de la variation du nombre de leurs Côtés ſur leur Surface ou ſur leur Contour, ſuivant qu'elles ſont ſuppoſées iſopérimètres ou égales.

§. 14. Lemme. *Les Surfaces des Figures circonſcrites à un même Cercle ſont entr'elles comme leurs Contours.* En effet, la Surface d'une Figure circonſcrite à un Cercle, eſt égale à un Triangle qui a pour Hauteur le Rayon de ce Cercle & pour Baſe le Contour de la Figure. Donc, les Surfaces des Figures circonſcrites à un même Cercle ſont entr'elles comme des Triangles de même Hauteur, & qui ont pour Baſes les Contours de ces Figures; donc, ces Surfaces ſont entr'elles comme ces Contours.

En particulier, la Surface du Cercle eſt à la Surface d'une Figure qui lui eſt circonſcrite, comme le Contour du Cercle eſt au Contour de cette Figure.

§. 15. Lemmes. 1°. *Si un Cercle & une Figure circonſcriptible à un Cercle ſont iſopérimètres, la Surface du Cercle eſt moyenne géométrique entre cette Figure, & une Figure ſemblable circonſcrite au même Cercle.*

2°. *Si un Cercle & une Figure circonſcriptible à un Cercle ſont égaux; le Contour de cette Figure eſt moyen géométrique entre le Contour du Cercle & le Contour d'une Figure ſemblable circonſcrite au même Cercle.*

Symboliquement. 1°. Soit C un Cercle, F une Figure iſopérimètre à ce Cercle & circonſcriptible à quelque Cercle; & ſoit F' une Figure ſemblable à F & circonſcrite à C. J'affirme, que $F : C = C : F'$.

Démonſtration. $F : F' = Cont.^2 F : Cont.^2 F' = Cont.^2 C : Cont.^2 F'$.

Mais (§. 14.) $F' : C = Cont.\ F' : Cont.\ C = Cont.^2 F' : Cont.\ F' \times Cont.\ C$.

Donc, $F : C = Cont.^2 C : Cont.\ F' \times Cont.\ C = Cont.\ C : Cont.\ F' = C : F'$. *C. q. f. d.* 1°.

2°. Soit $C = F$; ſoit F' circonſcrite à C & ſemblable à F. J'affirme, que $Cont.\ C : Cont.\ F = Cont.\ F : Cont.\ F'$.

Démonſtr. $Cont.\ C : Cont.\ F' = C : F' = F : F' = Cont.^2 F : Cont.^2 F'$.

$Cont.\ F' : Cont.\ F = Cont.^2 F' : Cont.\ F \times Cont.\ F'$

Donc, $Cont.\ C : Cont.\ F = Cont.^2 F : Cont.\ F \times Cont.\ F' = Cont.\ F : Cont.\ F'$ *C. q. f. d.* 2°.

§. 16. Théorême. *Le Cercle est plus grand qu'aucune Figure rectiligne de même Contour; & il a un Contour plus petit qu'aucune Figure rectiligne de même Surface.*

En effet. Dans la Proportion (§. 15. 1°.); $F : C = C : F'$; $C < F'$; donc, $F < C$.

Et dans la Proportion (§. 15. 2°.) $Cont. C : Cont. F = Cont. F : Cont. F'$;

ou, $Cont. C : Cont. F' = Cont.^2 C : Cont.^2 F$;

$Cont. C < Cont. F'$;

donc, $Cont.^2 C < Cont.^2 F$;

donc, $Cont. C < Cont. F$.

Donc en particulier, le Cercle est plus grand qu'une Figure régulière de même Contour, & il a un Contour plus petit qu'une Figure régulière de même Surface. Mais les Figures régulières jouissent elles-mêmes des Propriétés de Maximum de Surface & de Minimum de Contour, rélativement aux Figures irrégulières de même nom. Donc le Cercle jouit de ces Propriétés rélativement à toute Figure rectiligne.

§. 17. Il découle immédiatement du §. 15 que *les Figures rectilignes isopérimètres & circonscriptibles à un Cercle, sont entr'elles en raison inverse des Contours ou des Surfaces des Figures semblables à elles circonscrites à un même Cercle.* Et *les Contours des Figures rectilignes égales & circonscriptibles à un Cercle, sont entr'eux en raison sous-doublée des Contours (ou des Surfaces) des Figures semblables à elles, & circonscrites à un même Cercle.*

Donc en particulier, la Comparaison des Contours des Figures régulières égales ayant des nombres différens de Côtés, & celle des Surfaces des Figures régulières isopérimètres, sont réduites à la Comparaison des Contours ou des Surfaces des Figures régulières respectivement semblables à elles, circonscrites à un même Cercle.

§. 18. Lemme. *Si on partage un Angle aigu d'un Triangle rectangle en un nombre quelconque de Parties égales: Le Côté opposé à cet Angle est partagé en parties inégales, d'autant plus grandes, qu'elles sont plus éloignées du sommet de l'Angle droit.*

En effet, (par la 3e. Prop. du VIe. Livre des Elémens d'Euclide), deux Parties voisines sont entr'elles comme celles des Droites qui divisent l'Angle qui se terminent à leurs Extrêmités; & ces Droites sont d'autant plus grandes qu'elles sont plus éloignées du pied de la Perpendiculaire.

En particulier, si on répète la Partie la plus éloignée du Sommet de l'Angle droit un nombre de fois égal à celui des Parties dans lesquelles l'Angle est divisé: On obtient une Quantité plus grande que le Côté opposé à l'Angle divisé.

§. 19. *Les Contours des Figures régulières circonscrites à un même Cercle sont d'autant plus petits que le Nombre des Côtés de ces Figures est plus grand.*

Fig. V. Soit *CA* le Rayon d'un Cercle, soient *AB*, *AD*, les demi-Côtés de deux Figures

régulières circonscrites à ce Cercle, dont les nombres de Côtés different d'une Unité, & sont respectivement $n+1$, & n. Partant, les Angles ACB, ACD, sont respectivement la $\frac{1}{n+1}$ & la $\frac{1}{n}$ partie de deux Droits; donc, ces deux Angles sont entr'eux comme n & $n+1$; donc, l'Angle ACD peut être conçu divisé en $n+1$ parties égales dont BCD en est une. Donc (§. 18.) $(n+1)\, BD > AD$.

Donc, $(n+1)\, AD - (n+1)\, BD < (n+1)\, AD - AD$; ou, $(n+1)\, AB < n \times AD$. Savoir, le demi-Contour de la Figure dont AB est le demi-Côté, est plus petit que le demi-Contour de la Figure dont AD est le demi-Côté; ou de deux Figures régulières circonscrites à un même Cercle, & dont les nombres de Côtés different d'une Unité, celle dont le nombre des Côtés est le plus grand, a le plus petit Contour ou est la plus petite. Partant; augmentant successivement d'une Unité le nombre des Côtés; on obtient généralement, que le Contour d'une Figure régulière circonscrite à un Cercle proposé est d'autant plus petit que le nombre de ses Côtés est plus grand.

§. 20. Théorême. *Les Surfaces des Figures régulières isopérimètres sont d'autant plus grandes que le Nombre de leurs Côtés est plus grand. Et les Contours des Figures régulières égales sont d'autant plus petits que le Nombre de leurs Côtés est plus grand.*

En effet, 1°. Les Figures régulières isopérimètres sont (§. 17.) en raison inverse des Contours des Figures semblables à elles circonscrites à un même Cercle. Mais (§. 19), ces derniers sont d'autant plus petits que ces Figures ont plus de Côtés; donc, au contraire, les premières sont d'autant plus grandes qu'elles ont plus de Côtés.

2°. Les Contours des Figures régulières égales, sont (§. 17), en raison sous-doublée des Contours des Figures semblables circonscrites à un même Cercle. Mais (§. 19), ces derniers sont d'autant plus petits que ces Figures ont plus de Côtés; donc aussi les Contours des premières sont d'autant plus petits qu'elles ont plus de Côtés.



CHAPITRE SECOND.

Des Parallélépipèdes, des Prismes & des Cylindres.

§. 21. Théorême. *DE tous les Prismes de même hauteur, dont la Base est donnée de grandeur & d'espèce, le Prisme droit a la Surface la plus petite.*

Démonstration. La Surface de chaque Face est proportionnelle à sa Hauteur; donc la Surface de chaque Face est la plus petite lorsque sa Hauteur est la plus petite; c'est-à-dire, lorsqu'elle est égale à la Hauteur du Prisme lui-même; c'est-à-dire, lorsque le Prisme est droit.

Réciproquement. *De tous les Prismes dont la Base est donnée de grandeur & d'espèce, & dont la Surface latérale est la même; le Prisme droit a la plus grande hauteur ou la plus grande Capacité.*

La Démonstration est celle des Inverses, conformément au §. 7.

§. 22. Théorême. *De tous les Prismes droits de même hauteur dont la Base est donnée de grandeur & a un nombre donné de Côtés; celui qui a pour Base une Figure régulière a la Surface la plus petite.*

Démonstration. La Surface d'un Prisme droit de hauteur donnée est proportionnelle au Contour de sa Base. Mais (§. 13), la Base étant donnée de grandeur & ayant un nombre donné de Côtés, son Contour est le plus petit lorsqu'elle est régulière. Donc de tous les Prismes droits de même hauteur dont la Base est donnée de grandeur & a un nombre donné de Côtés, celui qui a pour Base une Figure régulière a la Surface la plus petite.

§. 23. Théorême. *De deux Prismes droits de même hauteur & à Bases régulières égales, celui dont la Base a un nombre plus grand de Côtés a une Surface plus petite.* Et en particulier, *le Cylindre droit a une Surface plus petite qu'aucun Prisme de même hauteur & de même solidité.*

La Démonstration est la même que celle du §. précédent, d'après les §§. 20 & 26.

§. 24. Théorême. *De tous les Prismes droits de même hauteur dont la Surface totale est la même & dont la Base a un nombre donné de Côtés: celui qui a pour Base une Figure régulière est le plus grand.*

Symboliquement. Soient P & P' deux Prismes droits de même nom, de même hauteur & de même surface totale; dont le premier a une Base régulière & le second une



une Base irrégulière. J'affirme que la Base du premier Prisme est plus grande que la Base du second.

Soit P'' un Prisme de même hauteur, dont la Base soit égale à celle du Prisme P' & semblable à celle du Prisme P.

La Surface latérale du Prisme P'' est plus petite que la Surface latérale du Prisme P' (§. 22.); donc aussi la Surface totale de P'' est plus petite que la Surface totale de P'; & partant (supp.) plus petite que la Surface totale de P. Mais les Prismes P'' & P ont des Hauteurs égales & des Bases semblables; donc, les Dimensions de la Base de P'' sont plus petites que les Dimensions de la Base de P. Donc, la Base de P'' ou celle de P' est plus petite que la Base de P. Donc, &c....

§. 25. Théorême. *De deux Prismes droits de même hauteur & de même surface totale, & dont les Bases sont régulières; celui dont la Base a un nombre plus grand de Côtés a la plus grande solidité.* Et en particulier, *le Cylindre droit est plus grand qu'aucun Prisme droit de même hauteur & de même surface totale.*

La Démonstration est la même que celle du Paragraphe précédent, d'après le §. 23.

Je passe à déterminer l'Espèce d'un Prisme droit dont la Base est donnée d'espèce; de manière que sa Surface soit la plus petite avec la même Solidité; & réciproquement, que sa Solidité soit la plus grande avec la même Surface.

§. 26. Théorême. *De tous les Parallélépipèdes droits donnés de grandeur celui qui a la Surface la plus petite a toutes ses Faces quarrées, ou est un Cube.* Et réciproquement, *de tous les Parallélépipèdes de même Surface, le plus grand est un Cube.*

En effet, par les Paragraphes 22 & 24, le Parallélépipède droit ayant la plus petite Surface avec la même Capacité, ou la plus grande Solidité avec la même Surface, a pour Base un Quarré. Or, une Face quelconque peut être prise pour Base; donc, dans le Parallélépipède dont la Surface est la plus petite avec la même Capacité, ou dont la Capacité est la plus grande avec la même Surface; deux Faces opposées quelconques sont des Quarrés; donc, ce Parallélépipède est un Cube.

Remarque première. Soit h la Hauteur, & soit b le Côté de la Base d'un Parallélépipède droit à Base quarrée. Soit b' une moyenne géométrique entre h & b; & soit fait le Parallélépipède droit dont b est la hauteur, & b' le côté de la Base quarrée.

1°. Puisque $h : b' = b' : b$; $hbb = b'b'b$.. Donc, ces deux Parallélépipèdes sont égaux.

2°. Puisque $h : b' = b' : b$; 1°. Si $h > b$; $h > b'$; donc, $h - b > b' - b$.
2°. Si $b > h$; $b' > h$; donc, $b - h > b - b'$.

Donc, la Différence des Arrêtes du second Parallélépipède est moindre que la Différence des Arrêtes du premier.

3°. Les Expreſſions des Surfaces de ces deux Parallélépipèdes ſont,

$$2bb + 4bh \text{ , \& } 2b'b' + 4bb';$$
$$\text{ou , } 2bb + 4b'b' \text{, \& } 2b'b' + 4bb'.$$

Donc, l'Excès de la Surface du premier ſur la Surface du ſecond eſt $2(bb - 2bb' + b'b')$, ſavoir, le double du Quarré de la Différence des Côtés des deux Baſes.

Changeant de même le ſecond Parallélépipède en un autre à Baſe quarrée dont la hauteur ſoit b' & le Côté de la Baſe moyen géométrique entre b & b'; on obtient un troiſième Parallélépipède égal aux précédens, dont les Arrêtes ſont moins inégales & dont la Surface eſt plus petite. Continuant cette opération, on approche du Cube d'autant plus qu'on la pouſſe plus loin; de manière qu'il n'y a aucune Limite à la petiteſſe de la Différence des Arrêtes des Parallélépipèdes auxquels on peut parvenir.

Remarque ſeconde. h & b étant la hauteur & le Côté de la Baſe d'un Parallélépipède droit à Baſe quarrée; ſoit b' le Côté du Cube égal à ce Parallélépipède; ſavoir, la première des deux Moyennes proportionnelles entre b & h, & ſoit b'' la ſeconde de ces Moyennes. La Surface du Parallélépipède, eſt $2(bb + 2bh)$; & celle du Cube eſt $2 \times 3b'b'$. J'affirme; que, $bb + 2bh > 3b'b'$.

En effet, puiſque b, b', b'', h, font en proportion; . . . . $b + h > b' + b''$

$$\text{Donc, } bb + bh > bb' + bb'' > bb' + b'b'$$
$$\text{Mais, } bh = b'b''$$
$$\text{Donc, } bb + 2bh > bb' + b'b' + b'b''$$
$$> b'(b + b' + b'').$$
$$\text{Mais, } b + b'' > 2b'; \text{ donc, } b + b' + b'' > 3b';$$
$$\text{Donc, à fortiori, } bb + 2bh > 3b'b'.$$

On obtient donc cette Propoſition; le Cube a une Surface plus petite qu'un Parallélépipède droit à Baſe quarrée égal à lui. Mais un Parallélépipède droit à Baſe quarrée a une Surface plus petite qu'aucun Parallélépipède & qu'aucun Priſme quadrangulaire de même hauteur égal à lui. Donc, le Cube a une Surface plus petite qu'aucun Priſme quadrangulaire de même ſolidité. Et de-là, on démontre par la méthode des Inverſes; que le Cube eſt plus grand qu'aucun Priſme quadrangulaire de même Surface.

§. 27. Soit un Cylindre droit; & ſoit un Priſme droit de même hauteur dont la Baſe eſt circonſcrite à la Baſe du Cylindre. Ce *Priſme* eſt dit *circonſcrit au Cylindre*.

Les Capacités des Priſmes circonſcrits à un même Cylindre droit, ſont entr'elles comme leurs Surfaces ſoit totales ſoit latérales.

En effet, les Capacités ſont entr'elles comme les Baſes, c'eſt-à-dire, (§. 14), comme les Contours des Baſes; c'eſt-à-dire, comme les Surfaces latérales. Donc, &c.

En particulier, la Surface d'un Priſme droit circonſcrit à un Cylindre, eſt à la Surface du Cylindre comme la Capacité du premier eſt à la Capacité du ſecond.

§. 28. Théorême. *Le Cylindre d'Archimède a une ſurface plus petite qu'aucun Cylindre droit égal à lui; & il eſt plus grand qu'aucun Cylindre droit de même Surface.*

Soient C & C' deux Cylindres droits; dont le premier eſt un Cylindre d'Archimède & l'autre ne l'eſt pas.

J'affirme; que, 1°. Si $C = C'$; *Surf.* $C <$ *Surf.* C'
2°. Si *Surf.* $C =$ *Surf.* C'; $C > C'$.

Aux Cylindres C & C' ſoient circonſcrits des Priſmes droits P & P' à Baſes quarrées, le premier eſt un Cube, & le ſecond n'eſt pas un Cube.

On a la ſuite de Rapports égaux. $C : P =$ *Surf.* C : *Surf.* $P =$ *Baſe* C : *Baſe* $P =$ *Baſe* C': *Baſe* $P' = C' : P' =$ *Surf.* C' : *Surf.* P'.

1°. Soit $C = C'$. Puiſque $C : P = C' : P'$; $P = P'$; donc (§. 26), *Surf.* $P <$ *Surf.* P'. Mais, *Surf.* C : *Surf.* $P =$ *Surf.* C' : *Surf.* P'; donc, *Surf.* $C <$ *Surf.* C'.

2°. Soit *Surf.* $C =$ *Surf.* C'. Puiſque *Surf.* C : *Surf.* $P =$ *Surf.* C' : *Surf.* P'; *Surf.* $P =$ *Surf.* P'; donc (§. 26), $P > P'$; mais, $C : P = C' : P'$; donc, $C > C'$.

§. 29. Théorême. *De tous les Priſmes droits dont la Baſe eſt circonſcriptible à un Cercle & donnée d'eſpèce: Celui dont la Hauteur eſt double du Rayon du Cercle inſcrit à la Baſe, a la plus petite Surface avec la même Capacité, & la plus grande Capacité avec la même Surface.*

La Démonſtration eſt la même que celle du Paragraphe précédent, en inſcrivant des Cylindres aux Priſmes.

Scholie. Si la Baſe n'eſt pas circonſcriptible à un Cercle, le Priſme droit qui jouit de la Propriété du Minimum de Surface ou du Maximum de Capacité, eſt celui dont la Surface latérale eſt quadruple de la Surface d'une Baſe, ou celui dont la Surface latérale eſt les deux tiers de la Surface totale.

Corollaire. *De tous les Priſmes droits dont les Baſes ſont circonſcriptibles à un Cercle & données d'eſpèce; celui dont la Hauteur eſt égale au Rayon du Cercle inſcrit à la Baſe, eſt tel, que, il a la plus petite Surface, une Baſe non compriſe avec la même Solidité; & réciproquement, la plus grande Solidité avec la même Surface, une Baſe non compriſe.*

En effet, la Partie énoncée de la Surface de ces Priſmes, & leur Solidité, ſont l'une & l'autre les Moitiés de la Surface totale & de la Solidité des Priſmes de même Baſe & d'une Hauteur double. Donc, &c.

Scholie. La Propofition contenue dans ce Corollaire (appliquée au Cas particulier où la Bafe eft un Hexagone régulier), eft le Fondement d'un *Minimum Minimorum* rélatif aux Alvéoles des Abeilles, qui fait le principal objet de ma Differtation, publiée dans les Mémoires de Berlin pour 1781, & dans ma *Relatio*, &c.

Comme je défirois traiter en même tems d'une manière complette cette Application intéreffante des Mathématiques à l'Hiftoire naturelle, M. LE SAGE me permit d'y joindre fes propres Recherches fur la nature du Fonds des Alvéoles qu'il m'avoit déjà communiquées, & qui devoient faire partie d'une *Théorie des Caufes finales*, dont fes autres Travaux ont jufqu'à préfent retardé la Rédaction & la Publication, quoiqu'il l'ait développée, il y a près de vingt ans, à moi & à quelques-uns de nos Compatriotes.

CHAPITRE TROISIEME.

Des Pyramides & des Cônes.

§. 30. *Définition.* SI la Bafe d'une Pyramide eft circonfcriptible à un Cercle; & fi le Pié de la Hauteur eft au Centre de ce Cercle: J'appelle cette *Pyramide droite.*

Dans une Pyramide droite toutes les Faces ont une même Hauteur, & font également inclinées au Plan de la Bafe.

Théorême. *Soient deux Pyramides de même hauteur, dont les Bafes font égales tant en Surface qu'en Contour; que l'une foit droite & que l'autre ne le foit pas: j'affirme que la Surface de la première Pyramide eft plus petite que la Surface de la feconde.*

Soit $ABCDE$ - - - - LMN la Bafe d'une Pyramide oblique; foit P le Pié de la Hauteur de cette Pyramide; & S fon Sommet. Soit décompofée la Bafe en Triangles ayant leur Sommet commun au Point P, & ayant pour Bafes les Côtés AB, BC, CD, DE - - - - LM, MN, NA, de la Figure.

Sur le Plan de la Bafe foit menée une Droite indéfinie, fur laquelle foient portées des Droites $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, - - - - $L'M'$, $M'N'$, $N'A''$ refpectivement égales aux Côtés de la Bafe (*).

Sur

(*) Pour la commodité, je défignerai par une même lettre P' les Sommets de tous les Triangles conftruits fur des Parties de la Ligne $A'A''$; quoique ces Sommets foient différens. Je crois que le Développement de cette Propofition fondamentale peut être compris aifément fans une Figure, à laquelle le Lecteur peut fuppléer, s'il le croit néceffaire.

Sur les Droites,	ſoient faits dans le même Plan, des Triangles,	égaux aux Eſpaces
⋮		⋮
$A'C'$	$A'P'C'$	$APBC$
$A'D'$	$A'P'D'$	$APBCD$
$A'E'$	$A'P'E'$	$APBCDE$
⋮		⋮
$A'L'$	$A'P'L'$	$APBCDE$ -- L
$A'M'$	$A'P'M'$	$APBCDE$ -- LM
$A'N'$	$A'P'N'$	$APBCDE$ -- LMN
$A'A''$	$A'P'A''$	$APBCDE$ -- $LMNA$.

De tous les Sommets P' ſoient élevées au même Plan des Perpendiculaires $P'S'$, égales à la Hauteur PS de la Pyramide propoſée. Et ſoient conçues des Pyramides, ayant pour Hauteur $P'S'$, & pour Baſes les Triangles $A'P'C'$, $A'P'D'$, $A'P'E'$, ------ $A'P'L'$, $A'P'M'$, $A'P'N'$, $A'P'A''$.

Il découle immédiatement du §. premier que la Face $A'S'C'$ eſt plus petite que la ſomme des Faces ASB, BSC.

En effet, la Somme des Triangles APB, BPC eſt égale à la Somme des Triangles $A'P'B'$, $B'P'C'$; ſavoir la Somme des Rectangles des Côtés AB, BC, par les Hauteurs des Triangles APB, BPC, eſt ſuppoſée conſtante, & égale au Rectangle de la Somme de ces Côtés par la Hauteur du Triangle $A'P'C'$.

Ces Hauteurs ſont les Jambes des Angles droits de deux Triangles rectangles, dont l'autre Jambe de l'Angle droit eſt SP, & la Somme des Faces ASB, BSC, eſt proportionnelle à la Somme des Rectangles des mêmes Côtés par les Hauteurs de ces Faces qui ſont les Hypothénuſes de ces Triangles. Donc, (§. premier), la Face $A'S'C'$ eſt plus petite que la Somme des Faces ASB, BSC.

De même la Face $A'S'D'$ eſt plus petite que la Somme des Faces $A'S'C'$, & CSD; & à plus forte raiſon, plus petite que la Somme des Faces ASB, BSC, CSD.

De même la Face $A'S'E'$ eſt plus petite que la Somme des Faces $A'S'D'$, & DSE; & à plus forte raiſon, plus petite que la Somme des Faces ASB, BSC, CSD, DSE.

⋮

La Face $A'S'M'$ eſt plus petite que la Somme des Faces $A'S'L'$, LSM; & à plus forte raiſon, plus petite que la Somme des Faces ASB, BSC, CSD, DSE--- LSM.

La Face $A'S'N'$ eſt plus petite que la Somme des Faces $A'S'M'$, MSN; & à plus forte raiſon, plus petite que la Somme des Faces ASB, BSC, CSD, DSE -- LSM, MSN.

Et enfin, la Face $A'S'A''$ eſt plus petite que la Surface latérale de la Pyramide ayant pour Baſe $ABCDE$ - - $LMNA$.

Or la Face $A'S'A''$ eſt égale à la Surface de toute Pyramide droite de même

hauteur que la Pyramide oblique propofée, & dont la Bafe eft égale à la fienne tant en Surface qu'en Contour. Donc, la Surface latérale d'une Pyramide droite eft plus petite que la Surface latérale d'une Pyramide oblique de même hauteur, dont la Bafe eft égale à la fienne tant en Surface qu'en Contour.

En particulier, *fi la Bafe d'une Pyramide eft circonfcriptible à un Cercle, la Pyramide droite conftruite fur cette Bafe a une Surface plus petite qu'aucune Pyramide oblique de même hauteur conftruite fur la même Bafe.*

Or un Triangle eft toujours circonfcriptible à un Cercle. Donc en particulier, *de toutes les Pyramides triangulaires de même Bafe & de même Hauteur, la Pyramide droite a la Surface la plus petite. Item*, une Figure régulière eft toujours circonfcriptible à un Cercle; donc auffi, *une Pyramide droite à Bafe régulière a une Surface plus petite qu'une Pyramide oblique de même Hauteur, conftruite fur la même Bafe.*

Remarque. Le Développement de la Propofition précédente paroît tout particuliérement rélatif aux Pyramides obliques dont le Pié de la Hauteur eft au-dedans de leurs Bafes. Mais il s'applique aifément, à plus forte raifon, aux Pyramides dont le Pié de la Hauteur eft hors de leurs Bafes. La facilité avec laquelle on peut tirer cette Conclufion à fortiori, me paroît rendre fuperflu tout détail fur cet objet.

§. 31. Théorème. *Soient deux Pyramides droites de même hauteur dont les Bafes font égales & de même nom : Que l'une de ces Bafes foit régulière, tandis que l'autre ne l'eft pas. J'affirme; que, la Surface de la Pyramide à Bafe régulière eft plus petite*
Fig. VI. *que la Surface de la Pyramide à Bafe irrégulière.*

Les Bafes étant circonfcriptibles à des Cercles; leurs Surfaces font proportionnelles aux Rectangles de leurs Contours par les Rayons de ces Cercles. Mais (§. 13.) les Bafes étant égales & de même nom; le Contour de la Bafe régulière, eft plus petit que le Contour de la Bafe irrégulière; donc, au contraire, le Rayon du Cercle infcrit à la Bafe régulière eft plus grand que le Rayon du Cercle infcrit à la Bafe irrégulière.

Soit donc SC la Hauteur commune des deux Pyramides. Soit CR le Rayon du Cercle infcrit à la Bafe régulière; & CR' le Rayon du Cercle infcrit à la Bafe irrégulière. Les Droites SR, SR', feront les Hauteurs des Faces de ces deux Pyramides. Soient défignés par $Cont.\ CR$, $Cont.\ CR'$, les Contours des Bafes. Il faut prouver que $Cont.\ CR \times SR < Cont.\ CR' \times SR'$. Soit $R'S'$ parallèle à SR.

Les Triangles SCR, $S'CR'$, font femblables; donc, $SR : S'R' = CR : CR' = Cont.\ CR' : Cont.\ CR$. Donc, $SR \times Cont.\ CR = S'R' \times Cont.\ CR'$; mais, $S'R' < SR'$; donc, $SR \times Cont.\ CR < SR' \times Cont.\ CR'$. Donc, la Surface de la Pyramide à Bafe régulière, eft plus petite que la Surface de la Pyramide à Bafe irrégulière.

§. 32. Théorême. *De deux Pyramides droites de même hauteur, dont les Bases régulières sont égales, mais ont des nombres différens de Côtés; celle dont la Base a le plus grand nombre de Côtés a la Surface la plus petite.*

La Démonstration est précisément la même que celle du Paragraphe précédent; en partant du §. 20.

En particulier, *le Cône droit a une Surface courbe plus petite que la Surface latérale d'une Pyramide de même hauteur, & dont la Base est égale à la sienne* (d'après le §.16).

§. 33. Les Inverses des Propositions précédentes se démontrent toutes de la même manière, par la méthode générale des Inverses.

1°. *De deux Pyramides l'une droite & l'autre oblique, dont les Bases sont égales tant en Surface qu'en Contour, & dont les Surfaces latérales sont égales; la Pyramide droite a une plus grande hauteur ou une plus grande solidité; & la Hauteur & les Surfaces totales étant les mêmes, la Base de la Pyramide droite est la plus grande.*

2°. *De deux Pyramides droites de même Surface latérale, dont les Bases sont égales & de même nom, de manière que l'une est régulière & l'autre ne l'est pas; la Pyramide à Base régulière a une Hauteur plus grande; & la Hauteur & les Surfaces totales étant les mêmes, la Pyramide régulière a une plus grande Base.*

3°. *De deux Pyramides à Bases régulières de nombres différens de Côtés; si les Bases & les Surfaces latérales sont égales, celle dont la Base a le plus grand nombre de Côtés a la plus grande hauteur; & si les Hauteurs & les Surfaces totales sont égales, la Base dont le Nombre des Côtés est le plus grand est la plus grande.* En particulier, *un Cône droit est plus grand qu'aucune Pyramide de même Base & de même Surface, ou qu'aucune Pyramide de même Hauteur & de même Surface.*

§. 34. Il reste à déterminer l'Espèce d'une Pyramide droite à Base donnée d'Espèce, & celle d'un Cône droit, pour que leur Surface soit la plus petite avec la même Solidité, & réciproquement.

Or, par le Paragraphe 31, la Pyramide triangulaire de la plus petite Surface avec la même solidité, doit avoir pour Base un Triangle équilatéral; & dans une Pyramide triangulaire, chaque Face peut être prise pour Base.

Donc, la Pyramide triangulaire de la Surface la plus petite avec la même Solidité, est telle, que l'une quelconque de ses Faces est un Triangle équilatéral; donc cette Pyramide est le Tétrahèdre.

De-là; en procédant sur les Cônes & les Pyramides, de la même manière que j'ai procédé dans le Chapitre précédent sur les Cylindres & les Prismes, on peut déterminer l'Espèce du Cône droit, & celle d'une Pyramide droite, de manière que leurs Surfaces soient les plus petites avec la même Solidité; & réciproquement.

Quoique ce Procédé me paroiſſe rigoureux: Cependant, on y montre plutôt une Propriété dont doit jouïr la Figure de la plus petite Surface, qu'on ne montre que la Figure qui jouït de la première Propriété jouït auſſi de la ſeconde; & il ſeroit, je crois, long & pénible d'illuſtrer cette Propriété du Tétrahèdre régulier, par des Eclairciſſemens analogues à ceux qui ſont contenus dans le Paragraphe ſixième. Je crois donc devoir développer un autre moyen de déterminer l'Eſpèce du Cône donné de grandeur dont la Surface eſt la plus petite; d'où l'on conclut aiſément l'Eſpèce des Pyramides qui jouïſſent de la Propriété du Minimum.

§. 35. Lemme premier. *Les Surfaces des Cônes droits circonſcrits à une Sphère, ſont entr'elles comme leurs Solidités.*

En effet; ces Solides ſont égaux à des Cônes droits dont la Hauteur eſt égale au Rayon de la Sphère inſcrite, & dont les Baſes ſont égales à leurs Surfaces totales.

Lemme ſecond. *La Surface ou la Solidité d'un Cône droit circonſcrit à une Sphère, eſt en raiſon doublée de la Hauteur du Cône, & en raiſon inverſe de l'Excès de la Hauteur ſur le Diamètre de la Sphère*; ou elle varie comme la troiſième proportionnelle à l'Excès de la Hauteur ſur le Diamètre, & à la Hauteur.

Fig. VII. Soit SAX le Triangle rectangle générateur d'un Cône droit; ſoit $A'TA$ le demi-Cercle générateur de la Sphère inſcrite: J'affirme; que, la Surface ou la Solidité de ce Cône, eſt proportionnelle à $\frac{AS^2}{A'S}$.

En effet; ſoit mené le Rayon CT au Point de Contact du demi-Cercle & de SX.

Les Triangles, SAX, STC, ſont ſemblables; donc, $AX : SX = CT : SC$.

De-là, $AX : AX + SX = CT : AS$.

Donc, $AX^2 : (AX+SX)\,AX = CT : AS$.

Mais, $CT^2 : AX^2 = ST^2 : AS^2$

$= AS \times A'S : AS^2$

$= A'S : AS$.

Donc, $CT^2 : AX(AX+SX) = CT \times A'S : AS^2$.

Donc, $AX(AX+SX) = CT \times \frac{AS^2}{A'S}$.

Mais, la Surface du Cône eſt proportionnelle au premier Membre de cette Equation; donc, elle eſt auſſi proportionnelle au ſecond; ſavoir, à $\frac{AS^2}{A'S}$; ou, à une troiſième proportionnelle à $A'S$ & AS.

Lemme troiſième. La Différence de deux Droites étant donnée; la troiſième proportionnelle à la plus petite & à la plus grande d'entr'elles eſt la plus petite, lorſque la plus grande de ces deux Droites eſt double de l'autre.

Fig. VIII. Soient AS & $A'S$ deux Droites dont la Différence AA' eſt donnée; Et ſoit AC une troiſième proportionnelle à $A'S$ & AS. J'affirme que, AC eſt la plus petite, lorſque AS eſt double de $A'S$.

En effet;

En effet, puisque $AC : AS = AS : A'S$;
$AC : AC - AS = AS : AS - A'S$; ou, $AC : CS = AS : AA'$.
Donc, $CS \times AS = AC \times AA'$. Mais, $CS \times AS \leqq \frac{1}{4} AC^2$.
Donc, $AC \times AA' \leqq \frac{1}{4} AC^2$; donc $4AA' \leqq AC$; ou, $AC \geqq 4AA'$.
Donc, la plus petite Valeur de AC eſt d'être quadruple de AA'; & alors $CS = AS = 2AA'$.

§. 36. Corollaire. *De tous les Cônes droits circonſcrits à une même Sphère, le plus petit eſt celui dont la Hauteur eſt double du Diamètre de la Sphère inſcrite.* De-là; la Diſtance du Centre de la Sphère au Sommet du Cône eſt triple du Rayon de la Sphère; & de-là encore, le Côté du Cône eſt triple du Rayon de la Baſe.

Réciproquement. *La Surface totale d'un Cône droit étant donnée, la Sphère qui lui eſt inſcrite eſt la plus grande lorſque le Côté de ce Cône eſt triple du Rayon de la Baſe.*

La Démonſtration eſt la même que celle des Inverſes, & conforme au §. 7. En effet; ſoient C & C' deux Cônes droits de même Surface totale; que les Rayons des Sphères qui leur ſont inſcrites ſoient R & R'; que le Côté du Cône C ſoit triple du Rayon de la Baſe, tandis que cela n'a pas lieu dans le Cône C', ſoit C'' un Cône ſemblable à C & circonſcrit à la même Sphère que C'.

Par la directe; $Surf. C'' < Surf. C'$; donc, $Surf. C'' < Surf. C$; Mais, C'' & C ſont ſemblables; donc, toutes les Dimenſions de C'' ſont plus petites que les Dimenſions correſpondantes de C; donc, en particulier, le Rayon de la Sphère inſcrite à C'' ou à C' eſt plus petit que le Rayon de la Sphère inſcrite à C.

De même; la Solidité d'un Cône droit étant donnée, la Sphère inſcrite eſt la plus grande lorſque le Côté du Cône eſt triple du Rayon de la Baſe.

§. 37. Théorême. *De tous les Cônes droits de même Surface totale, le plus grand eſt celui dont le Côté eſt triple du Rayon de la Baſe*; & réciproquement, *de tous les Cônes droits égaux, celui dont le Côté eſt triple du Rayon de la Baſe a la Surface la plus petite.*

Démonſtration. Par le §. 35. Lemme premier, la Solidité d'un Cône droit eſt en raiſon compoſée de ſa Surface totale & du Rayon de la Sphère inſcrite; donc, la Surface totale étant donnée, la Solidité eſt proportionnelle au Rayon de la Sphère inſcrite; donc, la Solidité eſt la plus grande lorſque le Rayon de la Sphère eſt le plus grand; c'eſt-à-dire, lorſque le Côté du Cône eſt triple du Rayon de la Baſe (§. 36.).

Item; la Solidité étant donnée, la Surface eſt en raiſon inverſe du Rayon de la Sphère inſcrite; donc, elle eſt la plus petite lorſque ce Rayon eſt le plus grand; c'eſt-à-dire, lorſque le Côté du Cône eſt triple du Rayon de la Baſe (§. 36).

§. 38. *Définition.* Si la Baſe d'une Pyramide droite eſt circonſcrite à la Baſe d'un Cône droit, & ſi ces deux Solides ont une même hauteur, la *Pyramide* eſt dite *circonſcrite au Cône.*

Lemme. *Les Surfaces soit totales soit latérales des Pyramides circonscrites à un même Cône, sont entr'elles comme leurs Solidités*; & en particulier, la Surface d'une Pyramide circonscrite à un Cône, est à celle de ce Cône, comme la Solidité de la Pyramide est à la Solidité du Cône; & ces Rapports sont égaux à celui des Surfaces ou des Contours des Bases.

La Démonstration est la même que celle du §. 27.

Théorême. *La Base d'une Pyramide droite étant donnée d'Espèce : La Solidité de cette Pyramide est la plus grande avec la même Surface*; *& au contraire*, *la Surface est la plus petite avec la même Solidité*; *lorsque la Hauteur d'une Face est triple du Rayon du Cercle inscrit à la Base.*

Soient P & P' deux Pyramides droites à Bases semblables; que la Hauteur d'une Face dans P soit triple du Rayon du Cercle inscrit à la Base, & que cela n'ait pas lieu dans la Pyramide P'.

J'affirme; que, 1°. Si $Surf. P = Surf. P'$; $P > P'$
2°. Si $P = P'$; $Surf. P < Surf. P'$.

Démonstration. Soient C & C' les Cônes droits inscrits aux Pyramides P & P'. Dans le Cône C, le Côté est triple du Rayon de la Base, & cela n'a pas lieu dans le Cône C'. Donc, si $C = C'$, $Surf. C < Surf. C'$; & si $Surf. C = Surf. C'$; $C > C'$ (§. 37). Or, 1°. $Surf.P : Surf.C = Surf.P' : Surf.C'$; donc, si $Surf.P = Surf.P'$; $Surf.C = Surf.C'$. Donc, $C > C'$; Mais, $P : C = P' : C'$; donc, $P > P'$.

2°. $P : C = P' : C'$; donc, si $P = P'$; $C = C'$; donc, $Surf. C < Surf. C'$; Mais, $Surf. P : Surf. C = Surf. P' : Surf. C'$. Donc, $Surf. P < Surf. P'$.

En particulier, *le Tétrahèdre régulier jouït de la Propriété du Minimum de Surface avec la même Capacité*, *& du Maximum de Capacité avec la même Surface*; rélativement à toutes les Pyramides droites à Bases triangulaires équilatérales; & à plus forte raison, rélativement à toute autre Pyramide triangulaire.

Scholie. Dans l'Ouvrage dont je donne l'Abrégé, je détermine le Cône droit dont la Surface courbe est la plus petite avec la même Solidité; & réciproquement, la Solidité la plus grande avec la même Surface courbe; & je trouve que la Hauteur de ce Cône est au Rayon de sa Base, dans le Rapport de la Diagonale d'un Quarré à son Côté; & j'en fais l'Application aux Pyramides, & aux Fuseaux Coniques & Pyramidaux.



CHAPITRE QUATRIEME.

De la Sphère.

§. 39. Si un Solide terminé par des Surfaces planes seulement, ou en partie par des Surfaces planes & en partie par des Surfaces courbes de Cylindres & de Cônes droits ou entiérement par ces dernières, est tel; que toutes ses Faces planes, ou tous les Côtés de ses Surfaces Cylindriques ou Coniques, touchent cette Sphère (ou la toucheroient étant prolongées s'il est nécessaire). Ce *Solide* est dit *circonscrit à une Sphère.*

Lemme. Si un Solide est circonscrit à une Sphère, sa Capacité est égale à celle d'une Pyramide ou d'un Cône, dont la Base est égale à la Surface du Solide, & dont la Hauteur est égale au Rayon de la Sphère. Et partant; *la Capacité d'un Solide circonscrit à une Sphère, est à la Capacité de la Sphère, comme la Surface de ce Solide est à la Surface de la Sphère.*

§. 40. Lemmes. 1°. *La Capacité de la Sphère est à la Capacité d'un Solide de même Surface & circonscriptible à une Sphère, comme le Rayon de la première Sphère est au Rayon de la seconde.*

2°. *La Surface de la Sphère est à la Surface d'un Solide égal à elle & circonscriptible à une Sphère, comme le Rayon de la seconde Sphère est au Rayon de la première.*

Soit S une Sphère, P un Solide circonscriptible à une Sphère S'; & soient R & R' les Rayons de ces Sphères. 1°. Si $Surf. S = Surf. P$; $S : P = R : R'$
2°. Si $S = P$; $Surf. S : Surf. P = R' : R$.

Démonstration. 1°. $S' : P = Surf. S' : Surf. P$ (§. 39) $= Surf. S' : Surf. S$ (Supp.) $=$
$= R'^2 : R^2 = R'^2 \times R : R^3$

Mais, $S : S' = \; = R^3 : R'^3$

Donc, $S : P \; = R'^2 \times R : R'^3 = R : R'$ (*C. q. f. d.* 1°.

2°. $Surf. S' : Surf. P = S' : P$ (§. 39) $= S' : S$ (Supp.)
$= R'^3 : R^3$

Mais, $Surf. S : Surf. S' = R^2 : R'^2 \; = R^3 : R'^2 \times R$

Donc, $Surf. S : Surf. P \; = R'^3 : R'^2 \times R = R' : R$ (*C. q. f. d.* 2°.

§. 41. Théorêmes. 1°. *La Sphère est plus grande qu'aucun Solide de même Surface circonscriptible à une Sphère.*

2°. *La Sphère a une Surface plus petite qu'aucun Solide de même Capacité, circonscriptible à une Sphère.*

Démonstration. 1°. (Par le §. 40. 1°.), la Capacité de la Sphère est à la Capacité d'un Solide de même Surface & circonscriptible à une Sphère, en raison sous-doublée de la Surface de la première Sphère à la Surface de la seconde; c'est-à-dire, (supp.) en raison sous-doublée de la Surface du Solide à la Surface de la Sphère qui lui est inscrite. Mais le dernier Rapport, est un Rapport de plus grande inégalité; donc aussi le premier Rapport est un Rapport de plus grande inégalité; ou, la Capacité de la Sphère est plus grande que la Capacité d'un Solide de même Surface & circonscriptible à une Sphère.

2°. (Par le §. 40. 2°.), la Surface de la Sphère est à la Surface d'un Solide égal à elle & circonscriptible à une Sphère, en raison sous-triplée de la Capacité de la seconde Sphère à la Capacité de la première; c'est-à-dire, en raison sous-triplée de la Capacité de la Sphère inscrite au Solide, à la Capacité de ce Solide. Mais le dernier Rapport est un Rapport de plus petite inégalité; donc aussi, le premier Rapport est un Rapport de plus petite inégalité; ou, la Surface de la Sphère est plus petite que la Surface d'un Solide égal à elle & circonscriptible à une Sphère.

§. 42. Corollaire. *Si un Prisme, un Cylindre, une Pyramide ou un Cône sont égaux à une Sphère ou ont la même Surface qu'elle: Dans le premier Cas; la Surface de la Sphère est plus petite que les Surfaces de ces Solides; & dans le second Cas, la Capacité de la Sphère est plus grande que la Capacité de ces Solides.*

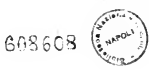
En effet. Le Cylindre d'Archimède est circonscriptible à une Sphère. Donc, la Sphère de même Surface que le Cylindre d'Archimède est plus grande que lui; & la Sphère égale au Cylindre d'Archimède a une Surface plus petite que lui. Mais, le Cylindre d'Archimède a une Surface plus petite qu'aucun Prisme & qu'aucun Cylindre de même Capacité (§. 28.), & il est plus grand qu'aucun Cylindre & qu'aucun Prisme de même Surface. Donc, à plus forte raison, la Sphère jouït de la Propriété du Maximum de Capacité ou du Minimum de Surface, rélativement à tout Prisme & à tout Cylindre de même Surface ou de même Capacité. Et le même raisonnement s'applique aux Pyramides & aux Cônes, en substituant au Cylindre d'Archimède le Cône tétrahédral.

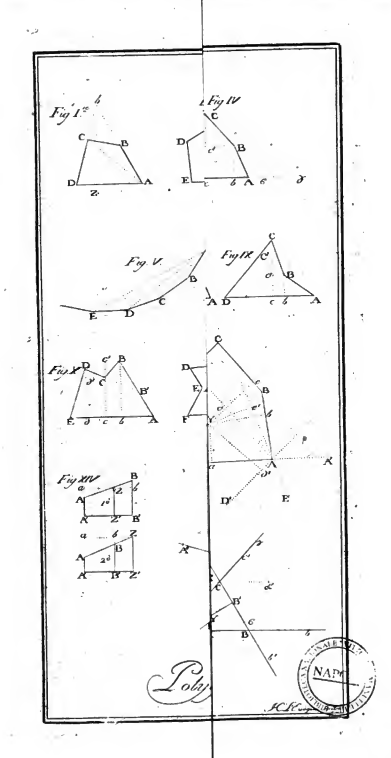
Scholie. Dans l'Ouvrage dont je donne l'Abrégé, je démontre que la Sphère jouït de la Propriété du Minimum de Surface avec la même Solidité, & réciproquement, rélativement à un Solide quelconque; & je fais diverses Applications aux Solides de Révolution, aux Solides réguliers, &c. Mais, mon plan de briéveté m'engage à y renvoyer le Lecteur, & à terminer ici cet Abrégé.

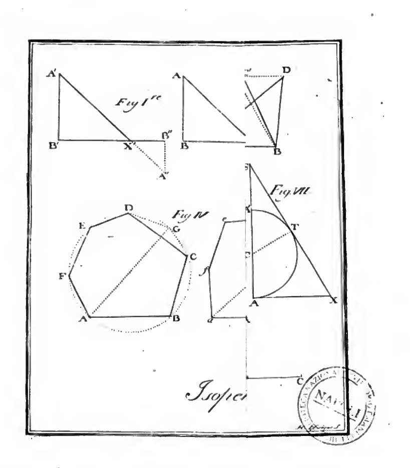
Je me propose à présent de m'occuper tout particuliérement des Améliorations dont est susceptible mon *Exposition des Principes des Calculs Supérieurs*, couronnée par l'Académie Royale de Prusse. Si les Mathématiciens auxquels cet Ouvrage est parvenu, veulent bien me communiquer des Remarques tendantes à en diminuer les imperfections, j'en profiterai avec reconnoissance.

F I N.

A GENEVE. De l'imprimerie de Bonnant. 1789.




Fig. I.re
Fig. IV
Fig. V.
Fig. IX
Fig. X
Fig. XIV
Poly
J.C.L.


Fig. 1re
A'
B'
X'
B"
A"
A
B
D
B
Fig. VII
S
T
A
X
C
Fig. IV
D
E
G
C
F
A
B
Isoper

